NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. LEMAIRE

Sur le problème de Pappus généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 133-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__133_0>

[K¹1]

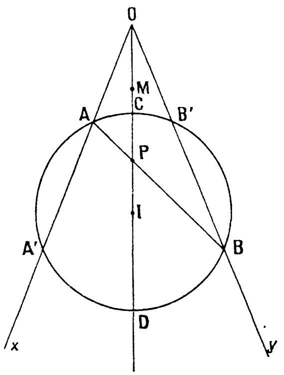
SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ;

PAR M. J. LEMAIRE.

Il s'agit du problème suivant : *Mener par un point* P *de la bissectrice d'un angle* $\widehat{XOY}$ *une droite sur laquelle les côtés de l'angle, ou leurs prolongements, interceptent un segment de longueur donnée* l. M. Joffroy a donné récemment (*N. A.*, 1916, p. 168) une solution de cette question. En voici une autre :

Supposons le problème résolu; soit une droite passant en P, coupant OX en A, OY en B, et telle

Fig. 1.



que $AB = l$; traçons le cercle passant en A et B et ayant son centre I sur OP; il coupe les côtés de l'angle en A′ et B′ et la bissectrice en C et D. Les points O, P, C, D forment une division harmonique, et si M est le milieu de OP, on a

$$\overline{MO}^2 = \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MI}^2 - r^2,$$

r désignant le rayon du cercle; d'ailleurs, si l'on appelle ω l'angle $\widehat{XOY}$,

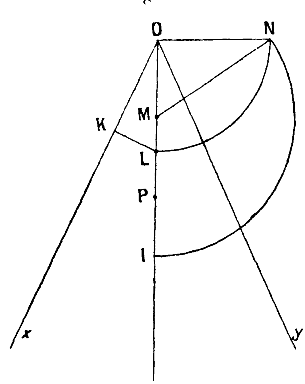
$$2r = \frac{AB}{\sin \widehat{AA'B}} = \frac{l}{\cos\frac{\omega}{2}};$$

ces deux relations déterminent r et MO et conduisent à la construction suivante : sur OX prenons $OK = \frac{l}{2}$, la perpendiculaire en K à OX coupant OP en L nous avons

$$OL = \frac{l}{2\cos\frac{\omega}{2}} = r;$$

menons en O une droite ON perpendiculaire à OP et

Fig. 2.



égale à OL, portons sur MP une longueur égale à MN, nous obtenons le point I; il ne reste plus qu'à décrire la circonférence de centre I et de rayon r pour obtenir les droites AB et A′B′ symétriques par rapport à OP et répondant à la question ; la discussion de cette construction est des plus simples et conduit à la condition

$$l \geqq 2\,\mathrm{OP}\ \mathrm{tang}\,\frac{\omega}{2}.$$

Il existe aussi deux droites passant en P, sur chacune desquelles l'un des côtés de l'angle $\widehat{\mathrm{XOY}}$ et le prolongement de l'autre interceptent un segment égal à l; la construction est analogue à la précédente, mais toujours possible.