NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON POMEY

Démonstration algébrique du théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__97_0>

[A3aα]

DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. LÉON POMEY (1),
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Toute équation algébrique entière de degré n a n racines.

Considérons le polynome

$$f(z) = Az^n + Bz^{n-1} + \ldots + K,$$

où z est une variable complexe $x + iy$, A, B, ..., K des nombres complexes quelconques (dont le premier et le dernier, A et K, sont supposés différents de zéro). Supposons qu'on mette $f(z)$ sous la forme ordinaire des nombres complexes, en désignant par $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ les deux polynomes entiers par rapport aux variables réelles x et y, qui représentent la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$; on aura

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

et le carré de son module sera

$$|f(z)|^2 = F(x, y) = P^2(x, y) + Q^2(x, y).$$

LEMMES PRÉLIMINAIRES.

LEMME I. — *Le polynome $f(z)$ est une fonction synectique, en sorte que les conditions classiques*

---

(1) Actuellement mobilisé comme lieutenant d'artillerie. Sur le front, en France, depuis le début des hostilités.

(*Note de la Rédaction.*)

suivantes sont toujours satisfaites :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1}$$

et que sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \text{aussi } \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$= \text{aussi } nAz^{n-1} + (n-1)Bz^{n-2} + \ldots.$$

Nous admettons ce résultat sans démonstration.

Corollaire I. — Il résulte de là que :

Le polynome $f'(z)$, ainsi que toutes les autres dérivées successives sont aussi des fonctions synectiques, en sorte que les conditions suivantes sont également satisfaites :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En sorte qu'on a

$$f''(z) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} - i\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}$$
$$= \text{aussi } \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées successives.

Corollaire II. — Il résulte de là immédiatement que :

Si un nombre $a = \alpha + i\beta$ annule toutes les $\lambda - 1$ premières dérivées [de façon qu'on ait

$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{\lambda-1}(a) = 0]$, TOUTES *les dérivées partielles de* $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *sans exception jusqu'à l'ordre* $\lambda - 1$ *inclus s'annuleront pour le système de valeurs* $x = \alpha$, $y = \beta$.

LEMME II. — *Si* $|z|$ *tend vers l'infini, il en est de même de* $|f(z)|$.

On démontre en effet facilement que, L désignant un nombre positif quelconque, on peut déterminer un nombre positif R tel que $|f(z)|$ soit $> L$ dès que $|z|$ est $\overline{\overline{>}}$ R.

COROLLAIRE III. — Donnons à z une valeur quelconque z_0, et soit L la valeur correspondante de $|f(z)|$. On peut trouver un nombre positif R tel que, pour $|z| \overline{\overline{>}} R$, on ait $|f(z)| > L$. La circonférence de rayon R, concentrique à l'origine, et la région intérieure du plan constituent un domaine borné et complet où $|f(z)|$, qui varie d'une manière *continue* avec z, admet un *minimum* m au plus égal à L, qu'il *atteint effectivement* pour une valeur déterminée $a = \alpha + i\beta$ de z, dont l'affixe est *intérieure* au cercle C.

Je renvoie, pour les détails de la démonstration du lemme II et du corollaire III, au *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

Je peux donc écrire

$$F(\alpha, \beta) = m^2.$$

LEMME III (relatif aux minima d'une fonction de deux variables). — Considérons une fonction *réelle quelconque* $F(x, y)$ de deux variables réelles, développable par la série de Taylor au voisinage d'un point (α, β) tel que $F(\alpha, \beta)$ soit un MINIMUM de $F(x, y)$, d'où

$$F(x, y) = F(\alpha, \beta) + (x - \alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y - \beta)\frac{\partial F}{\partial \beta}$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[(x - \alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + (y - \beta)\frac{\partial F}{\partial \beta}\right]^2 + \ldots$$

(en représentant par un crochet armé d'un indice la puissance symbolique correspondante de la fonction incluse dans le crochet).

Je dis que :

L'ensemble des termes du plus bas degré en $x - \alpha$ et $y - \beta$, dans ce développement, à la suite de $F(\alpha, \beta)$, *doit nécessairement former un ensemble homogène (un polynome homogène) de degré* PAIR *par rapport à l'ensemble des deux variables $x - \alpha$, $y - \beta$.*

En effet, supposons que $|x - \alpha|$ et $|y - \beta|$ soient infiniment petits l'un et l'autre, mais de telle sorte que $\frac{x - \alpha}{y - \beta}$ tende vers une limite *finie* l choisie arbitrairement positive ou négative.

Soit alors λ le degré le plus faible pour l'ensemble des deux variables $x - \alpha$ et $y - \beta$; d'où

$$F(x, y) - F(\alpha, \beta) = (y - \beta)^\lambda P_\lambda(l)$$
$$+ (y - \beta)^{\lambda+1} P_{\lambda+1}(l) + \ldots,$$

$P_\lambda(l)$, $P_{\lambda+1}(l)$ représentant des polynomes en l de degrés λ, $\lambda + 1$, ... au maximum respectivement.

Or je pourrai choisir le module de $y - \beta$ suffisamment petit pour que tous les termes à la suite du premier soient infiniment petits par rapport à lui, de façon que ce soit lui qui impose son signe au deuxième membre. En effet :

1° Si $F(x, y)$ est un polynome entier par rapport à x et y, le développement de Taylor se réduit à un polynome entier, et la possibilité de rendre tous les termes à la suite du premier négligeables par rapport à lui ressort immédiatement de la démonstration, donnée par M. Jordan, du lemme II.

2° Si $F(x, y)$ n'est pas un polynome entier, cela résulte immédiatement des propriétés élémentaires des séries entières (de leur continuité et de leur convergence uniforme). Ce cas-là ne nous intéresse d'ailleurs pas directement pour la démonstration actuelle.

Or *cela étant posé, il est bien évident que, si* λ *est* IMPAIR, *je peux choisir le signe de* $y-\beta$ *de façon que le signe de* $(y-\beta)^\lambda P_\lambda(l)$, *et par conséquent du second membre, soit* $(-)$.

En sorte qu'au voisinage du point (α, β) il y aurait des valeurs de $F(x, y)$ inférieures à son minimum $F(\alpha, \beta)$. Ce qui est contradictoire. *Donc il est nécessaire que* λ *soit pair*. En particulier il est *nécessaire* qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \beta}.$$

REMARQUE. — *Ce lemme s'applique, comme cas particulier, au polynome* $F(x, y)$ *défini précédemment comme carré du module de* $f(z)$, *et au point* (α, β) *qui le rend minimum.*

THÉORÈME DE D'ALEMBERT.

Nous allons montrer, en supposant le théorème de d'Alembert vrai jusqu'au degré $n-1$, que le minimum m atteint (corollaire III) par $|f(z)|$ est *nécessairement nul.*

Le théorème sera ainsi démontré pour le degré n, et comme il est vrai pour le degré 1, il le sera d'une manière générale.

Or si m n'est pas nul, appelons μ la valeur que prend $f(z)$ quand z prend la valeur $a = \alpha + i\beta$. L'équation $f(z) - \mu = 0$ a donc une racine a. Par suite en divisant cette équation par $z - a$, on retombe sur une équation de degré $n-1$ qui en a $n-1$. Donc $f(z) - \mu = 0$ a n racines : $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Je dis que plusieurs de ces racines sont nécessairement égales et que celles qui sont distinctes ont un ordre de multiplicité PAIR.

En effet, on a, par la formule de Taylor,

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{c} f(z) = f(a_j) + (z - a_j) f'(a_j) + \dfrac{(z-a_j)^2}{1.2} f''(a_j) + \ldots \\ (j = 0, 1, 2, \ldots). \end{array} \right.$$

Or puisque $F(\alpha_j, \beta_j)$ est minimum, on doit avoir (lemme III) :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 = 2\,P(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} + 2\,Q(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j},$$
$$\frac{\partial F}{\partial \beta_j} = 0 = 2\,P(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial P}{\partial \beta_j} + 2\,Q(\alpha_j, \beta_j)\frac{\partial Q}{\partial \beta_j}.$$

Puisque, par hypothèse, $P(\alpha_j, \beta_j)$ et $Q(\alpha_j, \beta_j)$ ne sont pas nuls tous deux, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j}\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}\frac{\partial P}{\partial \beta_j} = 0,$$

ou, en vertu des formules (1) (lemme I) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \alpha_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha_j} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = \ldots.$$

Il en résulte (même lemme) que l'on a

$$f'(\alpha_j + i\beta_j) = 0.$$

Donc la formule de Taylor (2) montre que a_j est racine d'ordre au moins égal à 2. Soit λ son ordre de multiplicité. Il est forcément *pair*, car $f'(a_j)$, $f''(a_j)$, ..., $f^{\lambda-1}(a_j)$ étant nuls, il en est de même (corollaire II) de toutes les dérivées partielles de $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ jusqu'à l'ordre λ exclusivement.

Or, puisque $F(\alpha_j, \beta_j)$ est un minimum, il faut (lemme III et remarque à la fin du lemme) que λ soit *pair*.

Donc l'équation $f(z) - \mu = 0$ n'a que des racines d'ORDRE PAIR, *ce qui est manifestement impossible si le degré n de $f(z)$* est IMPAIR. Donc dans ce cas le théorème est ainsi démontré.

Si le degré n est PAIR, la théorie de la division des polynomes permet de mettre en évidence ces racines; d'où

$$f(z) - \mu \equiv A(z - a)^{2\lambda}(z - b)^{2\lambda'} \ldots$$

Le second membre est donc le carré d'un polynome entier $p(z)$; d'où

$$f(z) \equiv p^2(z) + \mu,$$

$p(z)$ étant de degré $\frac{n}{2}$. On a donc

$$f(z) = [p(z) + i\sqrt{\mu}][p(z) - i\sqrt{\mu}].$$

Chacun des deux facteurs, mis ainsi en évidence, est un polynome entier de degré $\frac{n}{2}$, qui a par hypothèse $\frac{n}{2}$ racines, lesquelles devraient aussi être racines de $f(z)$.

On aboutit donc encore à une contradiction. Donc il est impossible de supposer $m \neq 0$. C. Q. F. D.