Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 85-95
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__85_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2217.

(1914, p. 96)

Soit PP′ *un diamètre variable d'une ellipse de foyers* F *et* F′, PF *et* PF′ *rencontrent l'ellipse en* M *et* M′ ; MF′ et M′F *se rencontrent en* Q ; PQ *rencontre* FF′ *en* K *et* MM′ *en* L. *Montrer que :*

1° *La tangente en* P′ *et* MM′ *se rencontrent en* R *sur* FF′ ;

2° *La droite* MM′ *enveloppe une ellipse et* L *est le point où* MM′ *touche son enveloppe ;*

3° *Le lieu de* Q *est une ellipse de foyers* F *et* F′ ;

4° *Chacune des droites* PQ *et* P′Q *est normale à une ellipse fixe.* (E.-N. Barisien.)

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Nous rappellerons tout d'abord la proposition suivante :

Si, par un foyer F d'une conique, on mène une sécante coupant la courbe en A et B, on a

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = 1p.$$

p désignant le paramètre de la conique.

1° Le triangle PFF′ coupé par la transversale RMM′ donne

$$\frac{RF'}{RF} \times \frac{MF}{MP} \times \frac{M'P}{M'F'} = 1,$$

on a aussi

$$\frac{1}{M'F'} + \frac{1}{F'P} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{1}{p},$$

d'où

$$\frac{M'P}{M'F'} = \frac{F'P}{p}, \qquad \frac{MP}{MF} = \frac{FP}{p};$$

d'où

$$\frac{RF'}{RF} = \frac{FP}{F'P} \quad \text{ou} \quad \frac{RF'}{RF} = \frac{F'P'}{FP};$$

le point R est le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FP'F'}$ avec FF'; c'est donc le point d'intersection de FF' avec la tangente en P'.

2° Par un point R de FF' passent deux droites MM'; l'enveloppe de ces droites est une conique, admettant les axes de l'ellipse donnée pour axes de symétrie, et bitangente à cette ellipse aux extrémités du grand axe; cette conique est une ellipse coaxiale à l'ellipse donnée d'axes a et b, et la longueur de ses axes est a et $\frac{b^3}{c^2}$.

L'enveloppe de MM' étant bitangente à l'ellipse donnée E aux extrémités du grand axe, MM' touche son enveloppe en son point d'intersection avec la polaire de R par rapport à E, c'est-à-dire au conjugué harmonique de R par rapport à MM', ou encore le faisceau P(RM'QM) étant harmonique, au point L.

3° Le triangle M'PF coupé par la transversale MQM' donne

$$FQ = QM' \times \frac{PF'}{MP} \times \frac{MF}{M'F'},$$

d'où, puisque

$$\frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{MF}{MP} = \frac{p}{FP}$$

et

$$\frac{1}{M'F'} + \frac{1}{PF'} = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{PF'}{M'F'} = \frac{PF'}{p} - 1,$$

$$FQ = QM'\left(\frac{F'P - p}{FP}\right) = (FM' - FQ)\left(\frac{F'P - p}{FP}\right),$$

d'où, puisque

$$PF + PF' = 2a,$$

d'où

$$FQ(a^2 + c^2) = FM'(a^2 + c^2 - aPF)$$
$$= (2a - M'F')(a^2 + c^2 - aPF);$$

or

$$M'F = \frac{b^2 PF'}{aPF' - b^2} = \frac{b^2 PF'}{a^2 + c^2 - aPF},$$

d'où

$$FQ(a^2 + c^2) = 2a(a^2 + c^2 - aPF) - b^2 PF';$$

on a, de même,

$$F'Q(a^2+c^2) = 2a(a^2+c^2-a\,PF') - b^2\,PF,$$

d'où

$$FQ + F'Q = \frac{2a(2c^2-b^2)}{a^2+c^2}.$$

4° Les points RF'KF forment une division harmonique; le point K est donc le symétrique par rapport au centre O de l'ellipse donnée E, du pied de la normale en P à E. Soit P_1 le point qui correspond à P sur le cercle principal de E, la droite KP_1 rencontre le petit axe en K' et l'on a, φ étant l'angle P_1OF,

$$OK = \frac{c^2}{a}\cos\varphi, \qquad OK' = \frac{c^2}{a^2+c^2}\,a\sin\varphi = \frac{c^2}{a}\,\frac{a^2}{a^2+c^2}\sin\varphi,$$

la projection du segment KK' sur un plan faisant avec le plan du cercle principal un angle θ, tel que

$$\cos\theta = \frac{a^2+c^2}{a^2},$$

a donc une longueur constante; cette projection enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. et la droite PKQ une développée d'ellipse.

Il existe une correspondance univoque entre les points P' et Q. car si l'on se donne l'un, l'autre est déterminé et uniquement, P' décrivant l'ellipse E, Q décrit une ellipse E_1; il en résulte que l'enveloppe de P'Q est une courbe de quatrième classe; cette courbe admettant visiblement les axes de E_1 et de E_2 comme axes de symétrie et tangentes doubles, est une développée de conique.

Autre solution
Par M. T. Ono.

Soient

$$P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha),$$

$$M(a\cos\beta,\ b\sin\beta), \qquad M'(a\cos\beta',\ b\sin\beta')$$

et e l'excentricité de l'ellipse donnée

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = -\frac{1-e}{1+e}\cot\frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\beta'}{2} = -\frac{1+e}{1-e}\cot\frac{\alpha}{2};$$

et l'on trouve successivement les coordonnées et les équations suivantes :

$$(\mathrm{MM'}) \qquad bx\cos\alpha + \frac{a(1+e^2)}{1-e^2}y\sin\alpha + ab = 0;$$

$$(\mathrm{Q}) \quad x = -\frac{a(1+3e^2)}{3+e^2}\cos\alpha, \qquad y = -\frac{b(1-e^2)}{3+e^2}\sin\alpha;$$

$$(\mathrm{PQ}) \quad bx\sin\alpha - a(1+e^2)y\cos\alpha + abe^2\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

$$(\mathrm{P'Q}) \qquad b(1+e^2)x\sin\alpha - a(1-e^2)y\cos\alpha + 2abe^2\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

$$(\mathrm{L}) \qquad x = -a\cos\alpha, \qquad y = -\frac{b(1-e^2)}{1+e^2}\sin\alpha.$$

Donc :

1° La tangente en

$$\mathrm{P'}(-a\cos\alpha,\ -b\sin\alpha)$$

et MM′ se rencontrent en

$$\mathrm{R}\left(-\frac{a}{\cos\alpha},\ 0\right).$$

2° La droite MM′ enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{1-e^2}{1+e^2}\right)^2} = 1;$$

et le point L est sur cette courbe. On voit que P′L est perpendiculaire à l'axe des x.

3° Le lieu de Q est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{1+3e^2}{3+e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{1-e}{3+e^2}\right)^2} = 1;$$

et ses foyers sont F et F′.

4° L'enveloppe de PQ est la courbe

$$\left(\frac{x}{ae^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{be^2}{1+e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

et cette courbe est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{b_1^2} = 1,$$

où

$$a_1 = \frac{b^2}{a(3+e^2)}, \qquad b_1 = \frac{b(1+e^2)}{3+e^2};$$

donc la droite PQ est normale à cette ellipse.

L'enveloppe de P'Q est la courbe

$$\left(\frac{x}{\frac{2ae^2}{1+e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{2be^2}{1-e^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

et cette courbe est la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1,$$

où

$$a_2 = \frac{2b^2(1+e^2)}{a[4 - 1(1-e^2)^2]}, \qquad b_2 = \frac{2b(1-e^2)}{4-(1-e^2)^2};$$

donc la droite P'Q est normale à cette ellipse.

N. B. — Les deux ellipses du n° 4° ont leurs foyers sur l'axe des y. En changeant b en bi, on aura les propriétés analogues pour une hyperbole.

Autres solutions par Mlle ANNE DE PRÉHYR et UN ABONNÉ.

2218.

(1914, p. 96, 192.)

Quand deux normales MP, MQ *à une ellipse abaissées d'un point* M *sont rectangulaires* : 1° *la droite* RS, *qui joint les pieds* R *et* S *des deux autres normales issues de* M, *est telle que les axes interceptent sur cette droite une longueur constante égale au rayon du cercle orthoptique à l'ellipse; 2° la droite* PQ *enveloppe une ellipse et la touche en son point de rencontre avec la corde* R'S' *symétrique de* RS *par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par Mlle ANNE DE PREHYR.

La droite PQ est la polaire d'un point C du cercle orthoptique; son enveloppe est donc déjà l'ellipse polaire réciproque de ce cercle pour l'ellipse donnée.

En posant $OC = d = \sqrt{a^2+b^2}$ et en prenant les coordonnées de C sous la forme $(d\cos\alpha, d\sin\alpha)$, l'équation de PQ est

$$(\mathrm{PQ}) \qquad \frac{x\,d\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\,d\sin\alpha}{b^2} - 1 = 0.$$

Le théorème de Joachimsthal sur les normales à l'ellipse montre que RS et OC ont des directions symétriques par rapport aux axes de l'ellipse donnée. On peut donc écrire l'équation de RS sous la forme

$$(\mathrm{RS}) \qquad x\sin\alpha + y\cos\alpha + \lambda = 0$$

et en exprimant que l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \mu\left(\frac{x\,d\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\,d\sin\alpha}{b^2}\right)(x\sin\alpha + y\cos\alpha + \lambda) = 0$$

est celle de l'hyperbole d'Apollonius de M, on a immédiatement $\lambda = d\sin\alpha\cos\alpha$.

L'équation de RS devient

$$(\mathrm{RS}) \qquad x\sin\alpha + y\cos\alpha + d\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

La droite RS est donc la droite symétrique par rapport à l'origine de celle qui joint les projections D, E de C sur les axes coordonnés; le segment intercepté sur RS par les axes coordonnés est donc égal à OC ou à d, comme il fallait le démontrer.

D'autre part, la droite PQ touche son enveloppe sur la droite m dont l'équation est

$$(m) \qquad \frac{x \sin\alpha}{a^2} - \frac{y \cos\alpha}{b^2} = 0.$$

Or on retrouve cette équation en éliminant le terme indépendant entre l'équation de PQ et celle

$$x \sin\alpha + y \cos\alpha - d \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

de la droite DE. Le point où PQ touche son enveloppe est donc sur DE.

N. B. — 1° L'équation de l'enveloppe de PQ est

$$\frac{x^2 d^2}{a^4} + \frac{y^2 d^2}{b^4} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

2° En poursuivant l'identification de l'équation (1) avec celle de l'hyperbole d'Apollonius de M (x_1, y_1), en supposant d quelconque et en faisant $d \cos\alpha = x_2$, $d \sin\alpha = y_2$, on retrouve les formules de Deboves pour les coordonnées d'un pôle tangentiel C et d'un pôle normal M.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, T. Ono et Un Abonné.

2220.

(1914, p. 144.)

On considère les trajectoires orthogonales Γ *d'un système de cercles* C *homothétiques entre eux par rapport au pôle* O. *Le centre de courbure de la courbe* Γ *répondant au point* M *où elle coupe orthogonalement le cercle* C *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. T. Ono.

Soient O l'origine des coordonnées et C le centre du cercle (C) qui est sur l'axe des x. En posant $OC = a$, le rayon de $(C) = \lambda a$, on a

$$(1) \qquad (x-a)^2 + y^2 = \lambda^2 a^2.$$

En éliminant a entre (1) et $(x-a)y' - y = 0$, on obtient l'équation différentielle de Γ

$$(2) \qquad y^2(1+y'^2) - \lambda^2(xy'-y)^2 = 0.$$

On trouve, d'après (2),

$$y'' = \frac{yy'(1+y'^2)}{\lambda^2 x(xy'-y) - y^2 y'}.$$

Soient maintenant $K(x_1, y_1)$ le centre de courbure de Γ répondant au point $M(x, y)$ et R son rayon, et l'on a

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\lambda a(\lambda^2 ax - y^2)}{y(x-a)},$$

$$(K) \qquad x_1 = x - \frac{\lambda^2 ax - z^2}{x-a}, \qquad y_1 = y + \frac{\lambda^2 ax - z^2}{y}.$$

On voit donc que KC et OM sont rectangulaires, et par suite que K est le pôle de OM par rapport à (C).

Autres solutions par M^lle ANNE DE PRÉHYR, M. J. LEMAIRE et UN ANONYME.

2223.

(1914, p. 336.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués*, F *et* F′ *les foyers d'une ellipse. Trouver le lieu du point d'intersection de* MF *et* M′F′ *ou de* MF′ *et* M′F.

T. ONO.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. R. BOUVAIST.

Considérons le cercle dont l'ellipse donnée est la projection; soient Ox et Oy les diamètres de ce cercle correspondant au grand axe et au petit axe de l'ellipse. Soient M_1 et M'_1 les extrémités de deux diamètres rectangulaires du cercle; si O désigne le centre de celui-ci, les demi-droites $\overline{OM_1}$ et $\overline{OM'_1}$ font avec Ox les angles φ et $\frac{\pi}{2} + \varphi$; soit a le rayon du cercle; posons enfin

$$\overline{OF} = \overline{F'O} = c, \qquad \widehat{M_1FO} = \theta, \qquad \widehat{M'_1F'O} = \theta'.$$

Les triangles M_1OF, M'_1OF' donnent les relations

$$\frac{\sin\theta}{a} = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{c}, \qquad \frac{\sin\theta'}{a} = \frac{\cos(\theta'-\varphi)}{c},$$

d'où, en éliminant φ, l'équation

$$(1) \qquad \frac{\sin^2\theta\sin^2\left(\theta' - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\theta'\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2(\theta+\theta')} = \frac{a^2}{2c^2}.$$

Soit P le point d'intersection de M_1F et $M'_1F'_1$; prenons sur Oy le point A tel que le vecteur $\overline{OA} = c$, construisons le point P' inverse du point P par rapport au triangle FAF'; dans le quadrilatère FAF'P', on a

$$\frac{AP'}{\sin\theta} = \frac{FP'}{\sin FAP'}, \qquad \frac{AP'}{\sin\theta'} = \frac{F'P'}{\cos FAP'},$$

d'où

$$\overline{AP'}^2 = \overline{FP'}^2 \sin^2\theta + \overline{F'P'}^2 \sin^2\theta';$$

or

$$FP' = -2c\frac{\sin\left(\theta' - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos(\theta+\theta')}, \qquad F'P' = -2c\frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos(\theta+\theta')},$$

d'où, en tenant compte de l'équation (1),

$$AP' = a\sqrt{2}.$$

Le lieu du point P est donc la quartique circulaire trinodale inverse par rapport au triangle FAF', du cercle de centre A et de rayon $a\sqrt{2}$; le lieu cherché est donc la projection de cette courbe sur le plan de l'ellipse.

On voit de même que le lieu du point d'intersection des droites MF', M'F est la projection sur le plan de l'ellipse, de la quartique circulaire trinodale, inverse par rapport au triangle A'FF' du cercle de centre A' et de rayon $a\sqrt{2}$, A' étant le symétrique de A par rapport à Ox.

2225.

(1914, p. 336.)

Soient Γ *et* C *une conique et le cercle, inscrits dans le triangle* ABC. *Trouver le lieu du point de contact de la conique variable* Γ *avec la quatrième tangente commune au cercle* C *et à la conique* Γ. *Étudier le cas particulier où la conique* Γ *est une parabole.*

N. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons le triangle ABC comme triangle de référence, soient

$$\Gamma = \frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{w}, \qquad C = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w}.$$

La tangente commune à Γ et à C est la droite

$$\frac{x}{C\beta - B\gamma} + \frac{y}{Ay - C\alpha} + \frac{z}{B\alpha - A\beta};$$

elle touche Γ au point

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A(B\gamma - C\beta)^2, \\ y &= B(C\alpha - A\gamma)^2, \\ z &= C(A\beta - B\alpha)^2; \end{aligned} \right.$$

dans le cas général où la conique Γ est quelconque, le problème est indéterminé, ce qui du reste était évident *a priori;* si Γ est une parabole, on a

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0,$$

et les équations (1) montrent alors que le lieu du point de contact est une cubique admettant comme directions asymptotiques les côtés du triangle ABC et tangente à ces côtés aux points de contact de la conique C. Son équation en coordonnées trilinéaires normales sera donc de la forme

$$(ax + by + cz) \\ \times (\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2\alpha\beta\, xy - 2\alpha\gamma\, xz - 2\beta\gamma\, yz) \\ + \lambda\, xyz = 0;$$

on déterminera facilement le paramètre λ, en écrivant qu'un point du lieu correspondant à des valeurs de A, B, C satisfaisant à la relation

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=0,$$

par exemple ($A=a$, $B=b$, $C=-2c$) est situé sur la cubique.