NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Construction du centre de courbure de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe donnée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 74-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__74_1>

[$O^1 2e$]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE L'HYPERBOLISME ET DE L'AFFINE D'UNE COURBE DONNÉE;

PAR M. F. BALITRAND.

Soient x et y les coordonnées d'un point m d'une courbe (m) et X, Y celles d'un point M d'une courbe (M). Si ces dernières sont liées aux précédentes par les formules

$$x = X, \qquad y = \frac{XY}{a}, \tag{1}$$

la courbe (M) est dite l'*hyperbolisme* de la courbe (m) [1].

[1] Au sujet de la définition et des propriétés de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe se reporter à un article de M. Goormaghtigh (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 404 et 407). Consulter aussi le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. Gomès Teixeira (t. I, p. 95, 99 et *passim*).

Nous nous proposons de construire géométriquement le cercle osculateur de (M) en M connaissant celui de (m) en m.

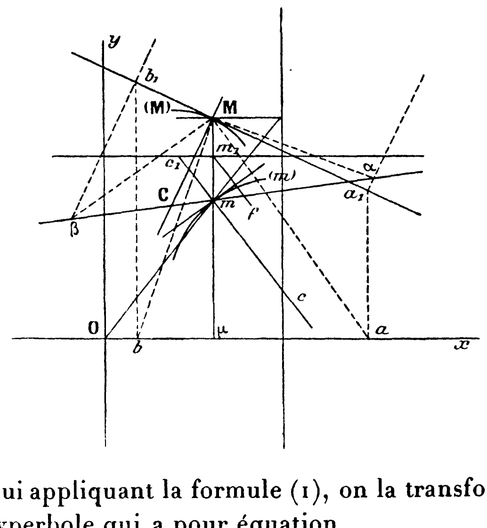
M. Goormaghtigh a donné dans les *Nouvelles Annales* une solution de ce problème fondée sur la considération des courbes intégrales; celle que nous allons indiquer est plus directe.

La parabole qui a pour équation

$$x^2 - \alpha x - \beta y - \gamma = 0 \tag{2}$$

a son axe parallèle à Oy et dépend de trois paramètres, α, β, γ dont on peut disposer pour qu'elle passe en m et y oscule la courbe (m).

Fig. 1.



En lui appliquant la formule (1), on la transforme en une hyperbole qui a pour équation

$$x^2 - \frac{\beta xy}{a} - \alpha x - \gamma = 0. \tag{3}$$

Celle-ci passe en M et y oscule (M). Le problème revient donc à construire son centre de courbure C en ce point.

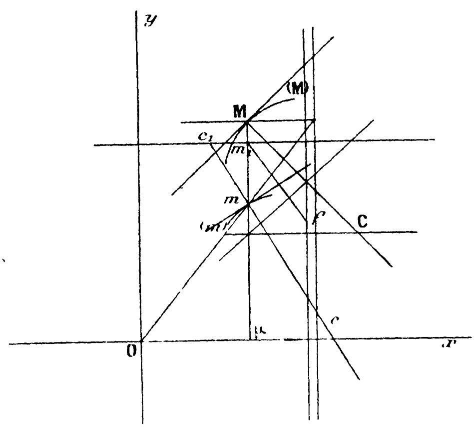
Or elle admet Oy comme asymptote et elle coupe Ox aux mêmes points que la parabole (2). Pour la déterminer, il suffit donc de connaître ces points.

Si l'on désigne par c le centre de courbure de (m) en m, et si l'on prolonge cm d'une longueur

$$mc_1 = \frac{cm}{2},$$

on obtient, d'après un théorème connu, un point de la directrice de la parabole (2) et en menant de c_1 une

Fig. 2.



perpendiculaire sur Oy on a cette directrice elle-même. Dès lors, la construction du foyer f est immédiate, car il suffit de prendre le symétrique, par rapport à la tangente en m, du point m_1 où mM coupe la directrice. En traçant ensuite, avec un rayon égal à la distance de la directrice à l'axe Ox, un cercle de centre f, on obtient les points a et b communs à Ox et à la parabole (2). Ces points appartiennent aussi à l'hyperbole (3), qui se trouve ainsi déterminée d'une façon surabondante ; car on en connaît le point M et la tangente en ce point, une asymptote, Oy, et deux points a et b.

La construction de son centre de courbure C en M est dès lors un problème connu, qui a reçu plusieurs solutions, et pour lequel nous indiquerons la suivante :

Les parallèles à Oy, *menées par* a *et* b, *rencontrent la tangente en* M *en* a_1 *et* b_1; *les parallèles à la normale en* M, *menées par ces points, rencontrent respectivement en* α *et* β *les perpendiculaires élevées en* M *à* Mb *et* Ma; *la droite* $\alpha\beta$ *détache sur la normale en* M *un segment égal au diamètre du cercle osculateur en ce point.*

En résumé, on a, pour déterminer le centre de courbure de l'hyperbolisme d'une courbe, la construction suivante, qui est assez longue, mais qui s'effectue entièrement avec la règle et le compas :

On prolonge le rayon de courbure cm *de* (m) *d'une longueur* $mc_1 = \frac{mc}{2}$ *et l'on mène par* c_1 *une parallèle à* Ox. *Soient* m_1 *et* μ *les points où la droite* mM *coupe cette parallèle et* Ox. *Du point* f, *symétrique de* m_1 *par rapport à la tangente en* m, *on décrit, avec* $m_1\mu$ *pour rayon, un cercle qui rencontre* Ox *en* a *et* b. *Les parallèles à* Oy, *menées par ces points, coupent la tangente en* M *en* a_1 *et* b_1 ; *les perpendiculaires à la tangente élevées en ces points rencontrent en* α *et* β *celles menées à* Mb *et* Ma *au point* M ; *la droite* $\alpha\beta$ *passe par l'extrémité du diamètre du cercle osculateur en* M.

Pour l'affine d'une courbe donnée, la construction est analogue, mais notablement plus simple. Les formules de transformation étant

$$x = X, \qquad y = kY \qquad (k = \text{const.}),$$

la parabole (2) a pour transformée une autre parabole

$$(4) \qquad x^2 - \alpha x - k\beta y - \gamma = 0$$

de même axe que la première. La connaissance du point f suffit pour déterminer cet axe et, celui-ci connu, la construction du centre de courbure de (4) en M n'offre pas de difficultés.

On peut notamment, pour l'obtenir, tirer par le point où l'axe rencontre la normale une parallèle à la tangente en M ; par le point M tirer une parallèle à l'axe et du point d'intersection de ces deux droites abaisser la perpendiculaire sur l'axe. Elle passe au centre de courbure cherché. On a donc la construction suivante :

Le point f étant déterminé comme précédemment, on mène par ce point une perpendiculaire sur Ox. *Par le point où elle rencontre la normale en* M *on tire la parallèle à la tangente en* M *et par* M *on tire une parallèle à* Oy. *Du point d'intersection de ces deux parallèles on mène la parallèle à* Ox; *elle passe au centre de courbure cherché.*