NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. GÉRARDIN

# Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à 120°

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 16 (1916), p. 62-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__62_0>

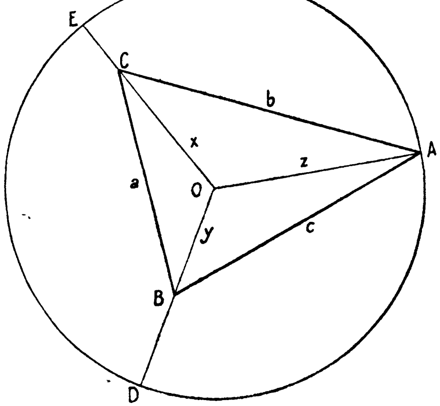
[I19a]

## DISTANCES, EN NOMBRES ENTIERS, DE TROIS POINTS ET DE LEUR CENTRE ISOGONE A 120°;

PAR M. A. GÉRARDIN.

Le problème suivant a été déjà traité depuis longtemps, mais je suis parvenu à une solution nouvelle et inédite qui pourra intéresser nos lecteurs : c'est ce qui m'a déterminé à en présenter l'étude.

*Supposons un cercle de centre* O, *et appelons* A, D, E, *les sommets du triangle équilatéral inscrit.*




*Trouver des points* B *sur* OD *et* C *sur* OE, *tels que les six lignes* $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ *soient représentées par des nombres entiers, et donner des formules générales du problème.* CE *et* BD *sont aussi entiers.*

Puisque les angles en O ont tous 120°, ce problème prend la forme suivante :

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$
$$x^2 + xz + z^2 = b^2$$
$$y^2 + yz + z^2 = c^2.$$

Tel est le système à résoudre, mais, avant de le traiter, rappelons quelques phases du problème.

*Résumé historique et bibliographique.*

Le n° 3, Vol. III de *The Mathematician*, probl. CXLVI, p. 164-165 de juillet 1848 [Ed. Rutherford et Fenwick, 1856, chez Spon, à Londres], a donné la solution du problème suivant de Weddle : « If the squares of the sides of a triangle be in arithmetical progression, the lines drawn from the angles to a point within the triangle so as to make equal angles with each other, are in arithmetical progression. »

Les nos 4 et 5, Vol. I, janvier et juillet 1880 de *The Mathematical Visitor* (fondé en 1879 à Washington par notre confrère M. Artemas Martin), ont publié d'intéressantes notes sur le problème 123 du Dr David S. Hart, M. A., Stonington, New London County, Connecticut, posé dans le n° 3 (de 1879), Senior Department : « To find three whole numbers such that the sum of the squares of any two of them increased by the product of the same two shall be a rational square. »

Ce journal a publié, p. 105-106, 129-130, les solutions :

N° 1 du Rév. U. Jesse Knisely, Ph. D., Newcomerstown, Tuscarawas County, Ohio ;

N° **2** d'Artemas Martin, M. A.;
N° **3** de l'auteur du problème, Hart;
N° **4** de Reuben Davis, réponse dont je n'ai pas connaissance.

Voici le résumé des trois premiers articles :

N° **1**. On a successivement (après rectification), suivant les calculs et la numérotation de Knisely,

$$(4)\qquad 4(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)=4a^2b^2,$$

$$(5)\qquad 2x^2+xy+xz-yz=a^2+b^2-c^2.$$

Retrancher le carré de (5) de l'expression (4); d'où

$$(6)\qquad xy+xz+yz=\frac{1}{3}\mathrm{A},$$

en posant

$$(10)\qquad 12a^2b^2-3(a^2+b^2-c^2)^2=\mathrm{A}^2.$$

On aura de même

$$(7)\qquad x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{6}\mathrm{A}.$$

En posant

$$(11)\qquad 2(a^2+b^2+c^2)\pm 2\mathrm{A}=\mathrm{B}^2,$$

on en déduit

$$\mathrm{B}x=a^2+b^2-c^2\pm\frac{1}{3}\mathrm{A},$$

$$\mathrm{B}y=a^2+c^2-b^2\pm\frac{1}{3}\mathrm{A},$$

$$\mathrm{B}z=b^2+c^2-a^2\pm\frac{1}{3}\mathrm{A}.$$

L'auteur fait ensuite les transformations

$$a=(1-n)b,\qquad c=(1+n)b,\qquad 1-4n^2=(1-pn)^2;$$

d'où

$$n = \frac{2p}{p^2+4}, \qquad \frac{A}{b^2} = \frac{3p^2-12}{p^2+4}.$$

Il est enfin conduit à

$$3p^2+16 = (4+qp)^2 \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{8q}{3-q^2}.$$

Pour avoir des valeurs *positives*, il faut $n < \frac{1}{4}$; avec $q = -2$, $p = 16$, on trouve la solution

$$x = 195, \qquad y = 264, \qquad z = 325.$$

Je reproche à ce procédé d'être un peu ardu et aussi de nécessiter des calculs de limites, pour avoir des solutions entières et positives. J'ajoute qu'il est facile d'en tirer des solutions générales; mais si une simplification, qui me semble bien improbable, ne se présente pas, l'identité finale nous donnera pour chacune de nos six inconnues initiales une fonction homogène compliquée du *huitième degré* entre deux variables auxiliaires. On calculera seulement ces valeurs le jour où l'on écrira la solution *définitive* et *complète* de cette question.

N° 2. M. Artemas Martin écrit

$$x^2+xy+y^2 = \left(\frac{p}{q}x - y\right)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y} = \frac{q^2+2pq}{p^2-q^2},$$

mais il particularise immédiatement en posant

$$p = 2, \qquad q = 1, \qquad x = 5m, \qquad y = 3m, \qquad z = wm,$$

d'où l'*équation double*

$$25 + 5w - w^2 = D^2, \qquad 9 + 3w + w^2 = E^2.$$

L'auteur pose

$$w = \frac{5(2n+1)}{n^2-1},$$

d'où

$$9n^4 + 30n^3 + 97n^2 + 70n + 19 = F^2$$

avec

$$F = 3n^2 + 5n + \frac{1}{2}a$$

et

$$a = 19, \qquad b = 0, \qquad n = \frac{19}{6}, \qquad m = 65,$$

il obtient

$$x = 325, \qquad y = 195, \qquad z = 264;$$

mais il ne faudrait point particulariser, si l'on voulait obtenir des solutions générales.

N° 3. Hart est amené, avec

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn + n^2, \qquad z = \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)x,$$

à écrire

$$y^2 + \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)xy + \left(\frac{2pq + q^2}{p^2 - q^2}\right)^2 x^2 = G^2.$$

Après développement par rapport à $p$, il pose

$$G = yp^2 + xpq + \frac{q^2}{2y}(3x^2 + xy - 2y^2),$$

d'où

$$p = -\frac{3x + 5y}{4y}.$$

Posant

$$p = t - \frac{3x + 5y}{4y}q$$

il écrit maintenant

$$G = yt^2 - \frac{1}{2}(x + 5y)qt - \frac{q^2}{16y}(21x^2 + 18xy + 9y^2),$$

d'où il tire

$$p = 9x^3 + 13x^2y + 27xy^2 + 15y^3$$
$$q = 4y(7x^2 + 6xy + 3y^2).$$

L'auteur termine par une analyse classique, et donne trois solutions dont la dernière est 264, 440, 325.

Ces valeurs générales de $p$ et $q$ sont intéressantes, mais nous ferons encore un reproche à cette méthode. On voit que $z$ sera une fonction du septième degré en $x$ et $y$, c'est-à-dire que l'identité finale donnera pour chacune des six inconnues initiales une fonction homogène du *quatorzième degré*.

Dans les « Mathematical Questions and Solutions, from the *Educational Times*... », on trouve la solution (new series, Vol. XI, 1907, p. 25-26) de la question 7464 de M. G. Heppel, M. A.

« Find positive integral solutions, as small as possible of the equations

$$x^2+xy+y^2=w^2, \qquad y^2+yz+z^2=v^2, \qquad z^2+zx+x^2=u^2.$$

[The proposer has not as yet found any smaller numbers than

$$x=27265, \qquad y=13464, \qquad z=39360,$$
$$w=35941, \qquad v=47544, \qquad u=58015.]$$

M. R.-F. Davis, M. A., résout

$$U^2+UV+V^2=H^2$$

en entiers positifs, en posant

$$U=p^2-2p-3, \qquad V=4p,$$

d'où, avec $p$ et $q>3$,

$$x=q(p^2-2p-3), \qquad y=4pq, \qquad z=p(q^2-2q-3).$$

Il reste à rendre carrée l'expression

$$pq(pq-3)[p^2+pq+q^2-6(p+q)+3]+9(p+q)^2.$$

*Exemple :*

$$p=\frac{23}{7}, \qquad q=\frac{29}{7};$$

d'où

$$x = 435, \qquad y = 4669, \qquad z = 1656,$$
$$w = 4901, \qquad v = 5681, \qquad u = 1911.$$

M. le lieutenant-colonel R. E., Allan Cunningham, de Londres, indique dans une Note insérée à la suite de cette réponse, que L. Euler (*Comment. Arith. Coll.*, Vol. II, p. 414-417) a résolu une équation similaire.

M. Cunningham ajoute la solution suivante :

$$x = 960, \qquad y = -1064, \qquad z = 665,$$
$$v = 931, \qquad u = 1415, \qquad w = 1016$$

et dit qu'il est difficile de trouver par cette méthode des nombres tous positifs.

Il faut voir aussi, en général, pour l'étude des *triples équations* et des *doubles équations* la traduction de l'*Inventum Novum* de J. de Billy (*Œuvres de Fermat*, t. III).

Pour terminer ce bref historique, on peut dire que, si la forme du problème admettait un nombre négatif, on en obtiendrait immédiatement de nombreuses identités, l'emploi d'une méthode quelconque fournissant immédiatement des solutions.

Ce problème que l'on peut classer parmi les questions ardues d'analyse indéterminée en *entiers positifs* mérite d'être approfondi, et nous espérons que de nouveaux chercheurs feront bientôt connaître des solutions générales inédites et compléteront peut-être cette bibliographie condensée.

*
* *

Je note d'abord certaines remarques : si nous connaissons une solution

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = A^2 \tag{1}$$

particulière ou générale, nous aurons aussi

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha(\alpha+\beta)+\alpha^2=A^2$$
$$(\alpha+\beta)^2-\beta(\alpha+\beta)+\beta^2=B^2.$$

Les nombres $\alpha$ et $\beta$ étant connus, le problème se ramène à la simple résolution en positifs, entiers ou fractionnaires, de l'*équation double*

$$x^2+\alpha x+\alpha^2=B^2, \tag{2}$$
$$x^2+\beta x+\beta^2=C^2. \tag{3}$$

Nous connaissons plusieurs procédés simples :

I. En posant

$$B=x+u,$$

nous arrivons à l'équation

$$u^4-2\beta u^3+(4\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2)u^2$$
$$-(4\alpha\beta-4\alpha\beta^2)u+(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2)=D^2.$$

Le coefficient seul de $u^4$ étant carré, je pose

$$D=u^2-\beta u+\frac{1}{2}(3\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2)$$

et l'on retrouve ainsi la solution de Hart.

II. On peut écrire aussi

$$D=u^2-\beta u-k$$

et l'on obtient alors une équation de condition, où l'on doit prendre alternativement pour $\alpha$ et $\beta$ leurs valeurs générales $f^2-g^2$ et $g^2+2fg$ :

$$(3\beta^2+\alpha\beta-2\alpha^2-2k)u^2+2\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+k)u$$
$$+[\alpha^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-k^2]=0.$$

En annulant le coefficient de $u^2$, on retrouve le cas précédent; en posant

$$k = 2\alpha\beta - \alpha^2,$$

on trouve

$$u = \alpha, \qquad D = \alpha\beta, \qquad x = 0.$$

Enfin, il faut rendre carré le déterminant de cette équation, où $k$ peut être fractionnaire. On sait qu'*une* seule solution initiale suffit pour en obtenir une infinité d'autres, et cette solution est toujours facile à obtenir, même *mécaniquement* et *entière*, par mes procédés.

III. En posant

$$B = \alpha - \frac{p}{q}x,$$

on obtient

$$x = \alpha\,\frac{q^2 + 2pq}{p^2 - q^2}$$

et alors (3) s'écrit

$$(4) \qquad \beta^2(p^2 - q^2)^2 + \alpha\beta(p^2 - q^2)(q^2 + 2pq) + \alpha^2(q^2 + 2pq)^2 = D^2.$$

Cette équation de condition (4) étant de la forme

$$U^2 + 3V^2 = W^2,$$

on pourrait donc aussi l'étudier en posant

$$V = 2rs, \qquad U = r^2 - 3s^2, \qquad W = r^2 + 3s^2.$$

IV. L'étude des *équations doubles* est intéressante à faire, d'abord par les procédés classiques, et ensuite par des recherches nouvelles.

J'ai remarqué, en commençant cet article, que

$$x = -(\alpha + \beta)$$

nous donne une solution du système (2), (3); je poserai donc en général

$$x = t - (\alpha + \beta),$$

et il suffira que

$$t > \alpha + \beta,$$

pour avoir des solutions *positives*.

J'obtiens alors une équation de condition de la forme

$$(5) \qquad t^4 - Mt^3 + Nt^2 - MA^2 t + A^4 = D^2$$

avec

$$M = 3(\alpha + \beta), \qquad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = A^2,$$
$$N = 2A^2 + 2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2.$$

Cette forme (5) est la plus intéressante, car elle nous mène à trois cas subsidiaires :

$$1^\circ \qquad D = t^2 - \frac{1}{2}Mt + m,$$
$$2^\circ \qquad D = t^2 + st + A^2,$$
$$3^\circ \qquad D = A^2 - \frac{1}{2}Mt + nt^2,$$

que je vais étudier successivement.

1° En posant

$$m = A^2 - \frac{1}{8}(\alpha - \beta)^2,$$

j'en tire

$$x = -\frac{3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2}{8(\alpha + \beta)} = -\frac{(3\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)}{8(\alpha + \beta)}$$

qui nous conduit, *avec des solutions négatives*, à des identités du *quatrième degré*, puisque

$$\alpha = f^2 - g^2, \qquad \beta = g^2 + 2fg.$$

*Exemple :*

$$x = 80, \qquad y = 48, \qquad z = -63.$$

2° Nous avons alors

$$(2s + 3\alpha + 3\beta)t^2 - [s^2 - (2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2)]t$$
$$+ A^2(2s + 3\alpha + 3\beta) = 0.$$

En écrivant que son déterminant est un carré parfait, on retrouve soit le cas général d'un triangle rectangle, soit une nouvelle équation de la forme

$$s^4 + es^3 + fs^2 + gs + l = R^2$$

que l'on sait résoudre.

Voici la solution cherchée :

On pose

$$n = 1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8A^2},$$

d'où

$$x = (\alpha + \beta)\frac{8A^2 + (\alpha - \beta)^2}{16A^2 - (\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2)}{(5\alpha^2 + 6\alpha\beta + 5\beta^2)}.$$

Pour que $\alpha$ soit positif, il suffit d'avoir $f > g$; $x$ est évidemment positif, et l'on trouve ainsi :

$$x = (f^2 - g^2)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$y = (g^2 + 2fg)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$z = (f^2 + 2fg)(3f^4 + 4f^3g + 8f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$a = (f^2 + fg + g^2)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4).$$

Les valeurs générales de $b$ et $c$ se calculent facilement :

$$b = 7f^6 + 19f^5g + 23f^4g^2 + 16f^3g^3 + 8f^2g^4 + 4fg^5 + 4g^6,$$
$$c = 3f^6 + 15f^5g + 43f^4g^2 + 56f^3g^3 + 48f^2g^4 + 20fg^5 + 4g^6.$$

et l'on voit, en général, que l'on aura

$$b + c = 2a.$$

Les nombres $b$, $a$, $c$, sont donc en progression arithmétique, et ceci n'a pas lieu pour $x$, $y$, $z$.

Voici quelques solutions numériques; il faut toujours prendre $\alpha$ et $\beta$ premiers entre eux, sinon on retrouve des nombres déjà vus; de même, il sera facile de généraliser la remarque suivante : $f = 5$ et $g = 2$ donnent la même solution que $f = 3$ et $g = 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f = 2$ | $g = 1$ | $x = 195$ | $y = 325$ | $z = 264$ |
| 3 | 1 | 7208 | 6307 | 6765 |
| 3 | 2 | 9425 | 30160 | 21063 |
| 4 | 3 | 12383 | 58377 | 38760 |

On ne peut prendre $g < 0$, car il y aurait un nombre négatif; de plus, avec $f > g$, et $f$, $g$ fractionnaires, on retrouve les mêmes solutions.

On aurait pu, au lieu de poser

$$x = t - (\alpha + \beta),$$

effectuer immédiatement le produit (2) (3); on aurait ainsi les identités suivantes, obtenues par un autre procédé.

Ayant une solution particulière ou générale

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma$$

nous aurons aussi

$$x = \alpha\beta, \qquad y = \beta\gamma, \qquad z = \gamma\alpha.$$

Voici donc de nouvelles identités, provenant de a solution générale précédente; on ne peut pas réitérer ce procédé.

Les nouvelles valeurs générales de $a$, $b$, $c$ sont dans l'ordre

$$b\beta, \qquad c\alpha, \qquad a\gamma;$$

on aura ainsi

$$x = (f^2 - g^2)(g^2 + 2fg)(5f^4 + 12f^3g + 16f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$y = (f^2 - g^2)(f^2 + 2fg)(3f^4 + 4f^3g + 8f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4),$$
$$z = (f^2 + 2fg)(g^2 + 2fg)(3f^4 + 4f^3g + 7f^2g^2 + 8fg^3 + 4g^4).$$

*Application.* $f = 2$, $g = 1$; triangle 264, 325, 440.

Ces formules donnent de nouvelles solutions du problème géométrique posé et permettent de généraliser la question, au point de vue analyse indéterminée. Il sera maintenant facile de chercher d'autres identités.

Il sera intéressant de voir si d'autres éléments de ces curieux triangles sont entiers, ou s'ils ont certaines propriétés spéciales.

J'ai aussi trouvé des identités pour un problème analogue qui se ramène à l'étude en nombres entiers du système

$$x^2 - xy + y^2 = a^2,$$
$$x^2 - xz + z^2 = b^2,$$
$$y^2 - yz + z^2 = c^2.$$