Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 509-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__509_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

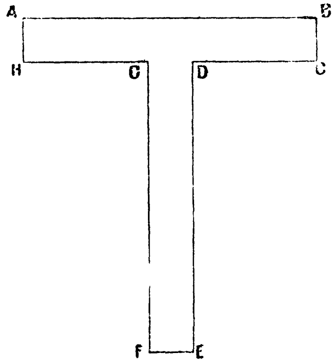
ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux points pesants, de masses* m *et* m', *sont reliés par un fil élastique de masse négligeable. Lorsque ce fil n'est pas tendu, sa longueur naturelle est* a; *s'il est tendu, de manière à prendre la longueur* $l\,(l > a)$, *sa tension est égale à* $\lambda^2(l-a)$, λ *étant une constante donnée.*

On place le fil verticalement, et on le tend de manière à lui donner la longueur $2a$; *puis, maintenant fixe le point le plus élevé, on imprime à l'autre une vitesse horizontale égale à* $\omega\lambda\sqrt{\dfrac{m+m'}{mm'}}$, ω *étant une constante donnée, et l'on abandonne le système à lui-même.*

On demande d'étudier le mouvement que prend le système.

Nota. — *S'il arrive que, dans le cours du mouvement, le fil reprenne sa longueur naturelle, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque métallique a la forme*



d'un simple té ABCDEFGH.

On donne

$$AB = DE = 10^{cm},$$
$$BC = FE = 2^{cm}.$$

1° *Déterminer la position du centre de gravité.*

2° *Calculer le moment d'inertie de la pièce par rapport à un axe situé dans son plan, parallèle à* AB, *et passant par le centre de gravité.*

On supposera la densité de la pièce égale à l'unité.

(Juin 1911.)

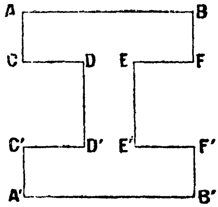
ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une sphère, homogène et pesante, peut tourner sans glisser autour d'un axe fixe, vertical, passant par son centre, et un point pesant est assujetti à se mouvoir sur la surface de la sphère. Les liaisons sont réalisées sans frottement; le rayon de la sphère, les masses de la sphère et du point sont égaux à l'unité.*

1° *Établir les équations qui font connaître le mouvement du système.*

2° *Calculer la réaction de la sphère sur le point.*

3° *Examiner le cas particulier où la vitesse relative initiale du point est tangente au parallèle de la sphère sur lequel se trouve le point (on ne s'occupera pas de la réaction).*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque métallique homogène*



a la forme d'un double té; les dimensions sont les suivantes :

$$AB = 150^{cm},$$
$$CD = 50^{cm},$$
$$AA' = 200^{cm},$$
$$DD' = 100^{cm},$$

on fait osciller la plaque autour de l'arête AB *maintenue horizontale. Quelle sera la durée d'oscillation de faible amplitude?*

On prendra

$$g = 981^{\text{cm}}. \qquad \text{(Juin 1913.)}$$

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un cône de révolution peut tourner, sans glisser, autour de son axe qui est maintenu fixe dans une position verticale. La base du cône est au-dessus du sommet. Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface du cône.*

1° *Établir les équations qui font connaître le mouvement de ce système matériel.*

2° *Examiner le cas particulier où, à l'époque initiale, la vitesse relative du point mobile est tangente au parallèle du cône qui passe par la position du mobile.*

Peut-on, dans ce cas, choisir les données initiales de manière que le mobile décrive un parallèle du cône?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une manivelle* OA, *ayant* 1^{m} *de longueur, tourne dans un plan fixe, autour de son extrémité* O *qui est fixe, en faisant* 150 *tours à la minute. Une bielle* AB, *ayant* 4^{m} *de longueur, est articulée en* A *à la manivelle, tandis que son extrémité* B *glisse sur une droite fixe* D, *distante du point* O *de* 10^{cm} *et située dans le plan dans lequel se meut la manivelle.*

Calculer la vitesse du point B :

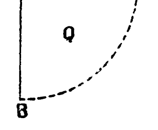
1° *Lorsque la manivelle est parallèle à* D;

2° *Lorsqu'elle est perpendiculaire à* D.

(Novembre 1913.)

Nancy.

1. *Évaluer l'intensité de la pression exercée par un*



fluide incompressible homogène pesant sur une paroi *plane* Q *située dans un plan incliné d'un angle donné* α *sur l'horizon. La paroi* Q *est un quart de cercle* OAB *limité par deux rayons* OA *et* OB *dont le premier est horizontal; le quart de cercle est plus bas que* OA.

2. *Déterminer le plan de charge et évaluer sa distance au centre de masse de la paroi homogène* Q.

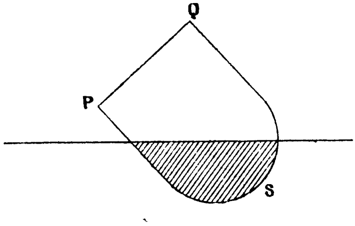
3. *Déterminer le point* O *de l'intersection* u *du plan de charge et du plan de la paroi* Q, *pour lequel* u *est axe principal d'inertie de* Q.

4. *Définir et déterminer le centre de pression de la paroi.*

5. *Si, dans le plan incliné donné, la distance de* OA *au plan de niveau du fluide est à notre disposition, comment faut-il choisir cette distance pour que le centre de pression soit aussi élevé que possible?* (Juin 1912.)

Soit (C) *un corps solide cylindrique pesant, homogène, de densité* 0,25, *ayant pour section droite un segment de parabole* PSQ, *où* S *est le sommet de la parabole et* PQ *la corde (limite du segment) perpendiculaire à l'axe à une distance donnée* d *du sommet* S; *cette distance* d *est supposée égale à quatre fois la distance du sommet* S *au foyer* F *de la parabole.*

On demande de déterminer, dans le solide (C), *un plan* π *tel que, si l'on place* (C) *dans un liquide pesant,*



homogène, de densité 8, *supposé en équilibre, de façon que* π *soit le plan d'affleurement de* (C), *le solide* (C) *reste en équilibre.* (Octobre 1912.)

Un point matériel pesant A, *de masse* M, *est fixé sur la* *surface d'une sphère pesante, pleine et homogène, de même masse* M. *Soient* O *le centre de la sphère et* R *son rayon.*

Après avoir imprimé à la sphère une rotation ω_0 *autour de* OA, *on pose la sphère sur un plan horizontal* Π, *et en même temps on imprime au centre de masses du système une vitesse* V_0 *parallèle au plan* Π.

On demande :

1° *D'étudier le mouvement du système ;*

2° *D'évaluer la pression de la sphère sur le plan* Π ;

3° *De déterminer, quand* $V_0 = 0$, *le lieu du point de contact de la sphère et du plan.*

On néglige le frottement. (Juin 1913.)

Un solide homogène pesant, ayant un point fixe O, *est de révolution autour de la droite qui joint* O *à son centre de gravité* G. A *l'instant initial le point* G *est situé au-dessus du plan horizontal passant par* O.

Soit $OG = l$; *fixons* $+Oz$ *suivant* OG *et* $O\zeta$ *suivant la zénithale de* O.

Si $Oxyz$ *est un trièdre trirectangle fixé au solide et* $O\xi\eta\zeta$ *un trièdre trirectangle (de même disposition) fixé au repère, la position du solide dans le repère est déterminée par les trois angles d'Euler* ψ, θ, φ *relatifs au point* O.

Soient $A = B$ *et* C *les moments principaux d'inertie du solide relatifs au point fixe* O, *et* p, q, r *les composantes suivant* Ox, Oy, Oz *de la vitesse angulaire de rotation du corps dans son mouvement autour de* O.

Supposons que, à l'instant initial, les valeurs ψ_0, θ_0, φ_0 *et* ψ'_0, θ'_0, φ'_0 *des angles d'Euler et de leurs dérivées* $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ *soient*

$$\psi_0 = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad \varphi_0 = 0,$$

$$\psi'_0 = \frac{2Cn}{3A}, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \varphi'_0 = n - \frac{Cn}{3A},$$

où n *(qui est la valeur initiale de* r*) n'est pas nulle.*

Soient enfin M *la masse du solide et* Mg *son poids, et soit*

$$3MglA = 2C^2n^2.$$

On demande de décrire le mouvement de l'axe O*z du solide dans le repère, et le mouvement du solide autour de son axe* O*z*.

Si, sur + O*z, on fixe un point* μ *à l'unité de distance de* O, *et qu'on désigne par* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de* μ *sur le plan horizontal* $O\xi\eta$, *on demande, en particulier, quelle est la forme de la courbe décrite par* P *quand* t *varie?* (Octobre 1913.)

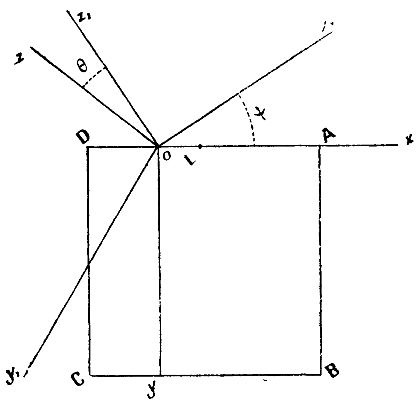
Paris.

COMPOSITION. — *On considère une plaque carrée homogène pesante, infiniment mince* ABCD, *de masse* M *et de côté*

$$AB = BC = 2a.$$

Cette plaque est assujettie aux liaisons suivantes :

1° *Un point* O *du côté* DA *est fixe;*



2° *Ce côté* DA *glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe* x_1Oy_1.

Trouver le mouvement de la plaque en supposant d'abord les conditions initiales quelconques.

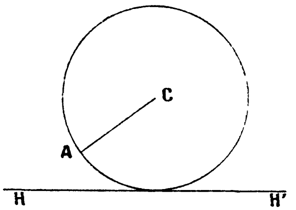
Notation. — *On appellera* l *la distance* OL *du point fixe* O *au milieu* L *du côté* AD.

En prenant pour axes liés à la plaque l'axe Ox *confondu avec le côté* OLA, *l'axe* Oy *parallèle à* AB, *l'axe* Oz *normal à la plaque, on appellera* ψ *l'angle* x_1Ox *compté autour de la verticale ascendante* Oz_1 *et* θ *l'angle* z_1Oz *compté autour de* Ox.

Cas particulier. — *En supposant qu'à l'instant initial la plaque parte du repos dans la position horizontale* ($\theta = 0$), *établir la relation qui lie* ψ *et* θ. *Calculer l'angle dont tourne le côté* DOA *dans le temps que met la plaque à passer de la position horizontale à la position verticale.*

Peut-il arriver que, la plaque étant placée dans ces conditions initiales particulières, le côté DOA *reste immobile.*

Épreuve pratique. — *Un cylindre droit à base circulaire homogène et pesant, de rayon* R *et de masse* M *est assu-*



jetti à rouler *sans glisser sur un plan horizontal fixe* HH'. *En un point* A *de la circonférence de la section droite passant par le centre de gravité* C *du cylindre est fixé au cylindre un point matériel pesant de masse* m. (*La figure représente cette section droite.*)

1° *Indiquer la position d'équilibre stable du cylindre.*

2° *Le cylindre étant écarté infiniment peu de cette position d'équilibre et abandonné sans vitesse, calculer en secondes la durée* T *d'une double oscillation infiniment petite.*

3° *Application numérique :*

$$R = 1^{m},$$
$$M = 2000^{g},$$
$$m = 20^{g}.$$

On prendra, dans le système C.G.S., $g = 980$.

(Juin 1913.)

COMPOSITION. — *Une barre homogène* AB, *non pesante, se déplace dans l'espace de telle sorte que l'extrémité* A *glisse sans frottement sur la droite dont les équations sont*

$$y = 0, \qquad z = h$$

et que l'extrémité B *glisse sans frottement sur le plan dont l'équation est* $z = -h$.

On désignera par $2l$ *la longueur de la barre et par* α *l'angle donné par la formule* $\sin\alpha = \frac{h}{l}$; *par* x *et* y *les coordonnées du centre de gravité de la barre.*

On suppose que tous les éléments de la barre sont attirés par le point O *proportionnellement à la distance; on désignera par* ω^2 *l'attraction de l'unité de masse placée à l'unité de distance.*

On demande : 1° *d'étudier le mouvement de la barre et de discuter la trajectoire du centre de gravité;* 2° *de calculer les réactions en* A *et* B; 3° *d'examiner le cas où*

$$y'_0 = \omega\sqrt{l^2\cos^2\alpha - y_0^2},$$

y_0 *et* y'_0 *étant les valeurs initiales de* y *et* $\frac{dy}{dt}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un volume homogène est formé par un cône de révolution de rayon* R *et de hauteur* h *et par une demi-sphère extérieure au cône et ayant pour grand cercle le cercle de base du cône. On demande :*

1° *La position du centre de gravité du volume;*

2° *Le rayon de gyration du corps par rapport à son axe de symétrie et par rapport à un axe perpendiculaire mené par le sommet du cône;*

3° *La longueur du pendule simple isochrone au pendule composé formé par le corps quand l'axe de rotation passe par le sommet du cône et est perpendiculaire à l'axe de symétrie.*

Application numérique : $h = 80$, $R = 12$.

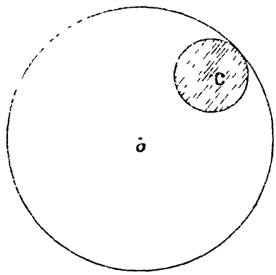
(Octobre 1913.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorèmes généraux de la Dynamique relatifs au centre de gravité.*

II. *Mouvement d'un cerceau appuyé sur une cheville cylindrique.*

La cheville a la forme d'un cylindre de révolution dont



l'axe est horizontal. Le cerceau se réduit à une circonférence matérielle pesante et homogène qui reste constamment dans le plan d'une section droite de la cheville et roule sans glisser sur la circonférence de cette section droite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un fil flexible et inextensible s'applique sur la demi-circonférence supérieure de la section droite d'un cylindre de révolution à génératrices horizontales Le coefficient de frottement du fil sur le cylindre est égal à $\frac{1}{2}$. Les extrémités libres du fil pendent verticalement; l'une d'elles,* A, *supporte une charge de* 1^{kg}. *Entre quelles limites devra varier la charge de l'autre,* B, *pour que l'équilibre subsiste?* (Novembre 1913.)

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Étude générale du mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe.*

II. *On considère le système formé par une barre horizontale homogène* OA *et un disque circulaire* (D) *de centre* A, *dont le plan est perpendiculaire à la barre. La barre* OA *peut tourner sans frottement autour de la verticale du point fixe* O, *tandis que le disque* (D) *roule sans frottement sur un plan horizontal. Le centre de gravité* G *du disque ne coïncide pas avec le centre de figure* A. *On demande d'étudier le mouvement que prend le système sous l'action de la pesanteur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un corps solide pesant est muni de deux axes de suspension parallèles dont la distance est égale à a. En faisant osciller ce corps successivement autour des deux axes, on trouve, pour les longueurs des pendules simples synchrones correspondants, respectivement l et l'. Sachant que le centre de gravité du corps est situé entre les deux axes, on demande de calculer :*

1° *La distance x du premier axe au centre de gravité;*

2° *Le rayon de gyration k du corps autour d'un axe parallèle aux axes de suspension et passant par le centre de gravité.*

Cas d'impossibilité ou d'indétermination.

Application numérique :

$$a = 1^{\text{m}},75, \qquad l = 1^{\text{m}},25, \qquad l' = 1^{\text{m}},50.$$

(Juin 1914.)