B. Globa-Mikhaïlenko

Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 506-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__506_0>

[S2a]

SUR UNE NOUVELLE FIGURE D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION;

PAR M. B. GLOBA-MIKHAÏLENKO,
docteur ès sciences.

Dans ma Thèse de doctorat, imprimée dans le premier fascicule de l'année 1916 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'ai démontré l'existence d'une infinité de figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini. Je me propose ici de résoudre le problème suivant :

Imaginons une masse fluide homogène formant une couche de densité 1, *limitée par deux cylindres elliptiques indéfinis et homothétiques. Les molécules de cette masse s'attirent suivant la loi de Newton et la masse, en entier, tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante* ω. *La pression extérieure est la même sur les deux faces de la couche. Dans quelles conditions cette masse sera-t-elle en équilibre relatif?*

Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit, comme nous le savons (1), que les surfaces des cylindres limitant la masse fluide soient des surfaces de niveau.

Or, à l'intérieur de la couche fluide (partie creuse),

(1) *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, Chap. XXXI.

le potentiel newtonien est constant; donc les seules forces qui y agissent sont les forces centrifuges et la fonction des forces y est

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation du cylindre intérieur. Si ce cylindre est une surface de niveau, ses coefficients doivent vérifier la condition

$$\frac{\omega^2}{2} a^2 = \frac{\omega^2}{b_2} b^2, \qquad \text{d'où} \quad a = b;$$

car U doit rester constant dans toute sa surface. Par conséquent, la couche cylindrique doit être de révolution.

Désignons son rayon extérieur par r_0, le rayon intérieur par kr_0, k étant le rapport des deux rayons. Alors pour $k = 0$ le cylindre est plein, et pour $k = 1$ la couche cylindrique devient infiniment mince.

Considérons un point à l'intérieur de la masse fluide. Soit r sa distance de l'axe. Alors le potentiel dans ce point sera [1]

$$V = -\pi r^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r^2 + \text{const.}$$

et la fonction des forces

$$U = -\pi r^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r^2 + \frac{\omega^2}{2} r^2 + \text{const.}$$

Pour avoir la fonction U sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de la couche, il faut poser

---

[1] *Voir* Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 108.

dans cette formule

$$r = r_0 \quad \text{et} \quad r = kr_0.$$

En écrivant que la fonction des forces prend la même valeur sur ces deux surfaces, nous aurons la condition d'équilibre

$$-\pi r_0^2 + \pi k^2 r_0^2 \log r_0^2 + \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$$
$$= -\pi k^2 r_0^2 + \pi k^2 r_0^2 \log k^2 r_0^2 + \frac{\omega^2 k^2 r_0^2}{2},$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{1 - k^2 + k^2 \log k^2}{1 - k^2}.$$

On voit facilement que $\frac{\omega^2}{2\pi} = 1$ pour $k = 0$; elle diminue lorsque k croît et devient nulle pour $k = 1$. Par conséquent, nous voyons que la couche cylindrique devient cylindre circulaire plein pour $\omega^2 = 2\pi$. C'est la vitesse limite pour ce cylindre. Si la vitesse décroît, la masse fluide peut affecter soit la figure d'un cylindre plein, soit la figure d'une couche circulaire. Par conséquent, le cylindre circulaire limite est une figure de bifurcation.

Ainsi, en rattachant ce résultat aux résultats obtenus dans ma Thèse, nous voyons que, pour chaque vitesse angulaire, il existe au moins deux figures ellipsoïdales d'équilibre : cylindre circulaire et couche cylindrique. Mais si ω^2 ne dépasse pas π_1, il faut y ajouter la troisième : celle du cylindre elliptique.