NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur deux théorèmes de M. Fontené relatifs à l'orthopole

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 495-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__495_1>

[$K^1 2e$]

SUR DEUX THÉORÈMES DE M. FONTENÉ RELATIFS A L'ORTHOPOLE;

PAR M. V. THÉBAULT.

Dans les *Nouvelles Annales* (juin 1910, p. 274), nous avons donné un théorème élémentaire relatif à l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit à un triangle qui nous a servi déjà à diverses reprises. Nous nous proposons de l'utiliser ici pour obtenir une démonstration particulièrement simple de deux théorèmes de M. Fontené parus dans les *Nouvelles Annales* en 1906.

1. M. Fontené a proposé sous le n° **2021** la question suivante :

Soit un triangle ABC *et soient* M, N, P *les milieux des côtés. Considérons les projections* D, E, F *d'un même point sur ces côtés. Si a, b, c sont respectivement les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD MN *et* DE, *le triangle abc est conjugué par rapport au cercle* DEF [1].

L'auteur en a donné (1906, p. 56) une solution analytique qui fut suivie (p. 59) d'une démonstration géométrique de M. R. Bricard. Celui-ci énonce ainsi le théorème de M. Fontené :

Soient ABC *un triangle,* DEF *le triangle podaire d'un point* S *par rapport à* ABC, a, b, c, *les intersections respectives des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE. *Les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent en un point qui appartient au cercle* DEF *et au cercle* MNP.

Sous cette forme, la question **2021** apparaît nettement comme la généralisation de la construction d'Hamilton relative au point φ de Feuerbach qui, comme l'on sait, est l'orthopôle, par rapport au triangle ABC,

---

[1] Si D, E, F sont les contacts du cercle inscrit, le centre d'homologie des triangles *abc* et DEF est le point φ de Feuerbach, l'axe d'homologie des triangles *abc* et ABC est la tangente en φ.
(W. R. HAMILTON.)

de la ligne des centres IO des cercles inscrit et circonscrit au triangle.

Or nous avons donné dans cette Revue (mars 1914, p. 108) deux démonstrations géométriques de la construction d'Hamilton dont la première nous paraît être assez élégante. Le raisonnement peut être généralisé en utilisant notre théorème de 1910 (p. 274) et le théorème que donna M. Lemoyne en 1904 :

Les distances de l'orthopôle φ *d'un diamètre* OS *du cercle circonscrit à un triangle aux pieds des hauteurs égalent respectivement les distances des sommets du triangle au diamètre* OS.

Autrement dit : *Les projections orthogonales des sommets du triangle sur le diamètre* OS *sont respectivement symétriques de l'orthopôle* φ *du diamètre par rapport aux droites joignant les milieux des côtés du triangle.*

Si l'on projette un point quelconque S *du diamètre* OS *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *sur les côtés de ce triangle en* D, E, F, *le cercle* DEF *passe par l'orthopôle* φ *de* OS *par rapport à* ABC.

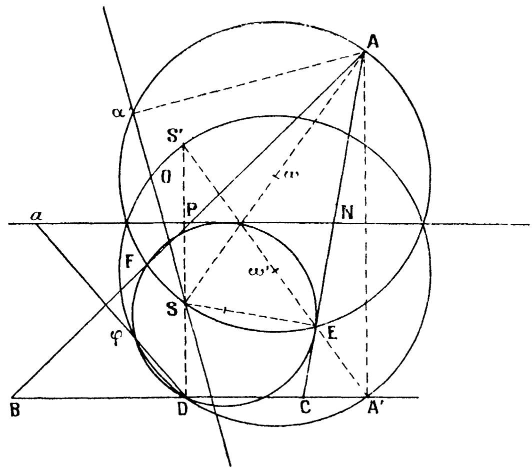
Le cercle DEF passe par φ. Le cercle ω circonscrit au quadrilatère AESF a pour centre le milieu de AS et son symétrique ω' par rapport à NP passe aussi par φ en vertu de notre théorème précédent. Ce cercle passe aussi en A', pied de la hauteur AA', et par le point D, car, S' étant symétrique de S par rapport à NP, ω' a pour diamètre SA'. (*Voir* la figure.)

Les droites EF, NP et φD sont donc les axes radicaux des cercles ω, DEF et ω' pris deux à deux et se coupent par suite en un même point a [1].

---

[1] M. R. Goormaghtigh, utilisant notre raisonnement pour la

Le triangle *abc* est donc conjugué par rapport au cercle DEF. Ce théorème de M. Fontené permet



alors d'énoncer un grand nombre de propriétés du triangle *abc*.

En voici quelques-unes parmi les plus intéressantes :

Le triangle abc a pour orthocentre le centre du cercle podaire de S.

Si P_a, P_b, P_c *sont les puissances des sommets a, b, c par rapport au cercle podaire de* S *et* ρ *le rayon de ce cercle, on a les relations :*

1°

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = -\frac{1}{\rho^2};$$

2°

$$\frac{\overline{ab}^2}{P_a P_b} + \frac{\overline{bc}^2}{P_b P_c} + \frac{\overline{ac}^2}{P_c P_a} = -\frac{2}{\rho^2};$$

---

démonstration de la constrution d'Hamilton (*Journal de Vuibert*, 38ᵉ année, p. 37), donna cette généralisation (même Revue, p. 69).

3°
$$\frac{(\text{aire } abc)^2}{P_a P_b P_c} = -\frac{1}{4\rho^2}.$$

2. Lorsque S est le centre du cercle inscrit I au triangle ABC, on obtient la propriété de W.-R. Hamilton énoncée au précédent paragraphe.

La démonstration en est simple, la première partie étant le cas particulier du théorème de M. Fontené.

D, E, F sont alors les contacts du cercle inscrit avec les côtés de ABC et φ le point de Feuerbach de ce triangle.

Les points a, b, C, situés sur la polaire de C par rapport au cercle inscrit, sont en ligne droite; il en est de même des points a, B, c et A, b, c, qui forment respectivement deux alignements.

Par suite, si γ' est le point où la tangente en φ au cercle I rencontre AB, la droite φF, par exemple, passant en c, γ' pôle de φF appartient à la polaire ab de C par rapport au cercle I. De même les points d'intersection de bcA avec BC, de acB avec CA, appartiennent à la tangente en φ au cercle I.

Donc *le triangle qui a pour sommets les points d'Hamilton a, b, c d'un triangle* ABC *est circonscrit à* ABC *et homologique à ce triangle; l'axe d'homologie est la tangente au cercle inscrit au point φ de Feuerbach.*

3. Le cercle podaire ω d'un point S du plan d'un triangle ABC est également celui de l'inverse triangulaire S' de ce point par rapport au triangle. Les points d'intersection φ_1 et φ_2 de ce cercle ω avec le cercle d'Euler du triangle, sont respectivement les orthopôles des diamètres OS et OS'.

M. Fontené a établi que *la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle* ω *soit tangent au cercle d'Euler de* ABC *est que* O, S, S' *soient en ligne droite*.

Notre théorème de 1910 le prouve immédiatement.

Pour que le cercle ω soit tangent au cercle d'Euler, il faut et il suffit que les orthopôles φ_1 et φ_2 de OS et OS' soient confondus; par suite il faut et il suffit que leurs symétriques par rapport à la droite NP des milieux de AB et BC par exemple, soient confondus, c'est-à-dire que OS et OS' soient confondus.

4. Un point R quelconque étant donné, il est intéressant de déterminer les points du diamètre OR tels que leurs cercles podaires soient tangents au cercle d'Euler du triangle ABC.

Soient M, M', N, N' les intersections avec OR des bissectrices intérieures et extérieures des angles A et B, ω et ω' les milieux de MM' et NN', S et S' les deux points cherchés, inverses triangulaires l'un de l'autre par rapport au triangle ABC.

On a visiblement

$$\overline{MM'}^2 = 4\omega S \times \omega S',$$
$$\overline{NN'}^2 = 4\omega' S \times \omega' S';$$

d'où, φ étant milieu de SS',

$$\overline{MM'}^2 = 4(\overline{\omega\varphi}^2 - \overline{S\varphi}^2),$$
$$\overline{NN'}^2 = 4(\overline{\omega'\varphi}^2 - \overline{S\varphi}^2)$$

et

$$\text{const.} = \overline{MM'}^2 - \overline{NN'}^2 = 4(\overline{\omega\varphi}^2 - \overline{\omega'\varphi}^2).$$

Le milieu de SS' étant déterminé, S et S' le sont aussi. Il existe un seul point φ et par suite deux points S et S' qui peuvent être intervertis.