NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI LEBESGUE

Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 481-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__481_0>

[L¹16b]

SUR DEUX THÉORÈMES DE MIQUEL ET DE CLIFFORD;

Par M. Henri LEBESGUE.

1. On connaît le théorème de Miquel [1] :

Étant données cinq droites dans un plan, il existe cinq paraboles dont chacune est tangente à quatre de ces droites; les foyers de ces cinq paraboles sont sur une même circonférence.

Clifford [2] a donné une très ingénieuse démonstration de ce théorème, qui est reproduite par Salmon [3]. Mais, bien que Salmon donne tout le raisonnement de Clifford, il n'énonce pas explicitement le résultat plus général de cet auteur, qui constitue l'un des plus simples et des plus élégants théorèmes récurrents qu'on puisse citer.

Le résultat de Clifford peut s'énoncer brièvement comme il suit :

A chaque système de $2p$ droites d'un plan on peut attacher un point, à chaque système de $2k+1$ droites on peut attacher une circonférence de façon à satisfaire aux trois conditions ci-dessous :

1° *Le point attaché à un système de $2p$ droites est commun aux $2p$ circonférences attachées aux*

(¹) *Journal de Liouville*, t. III, IX et X.

(²) *Messenger of Mathematics*, t. V.

(³) *Courbes planes*, Chap. IV, n° 146.

$2p$ systèmes de $2p-1$ droites qu'on peut déduire du système initial par la suppression d'une droite;

2° La circonférence attachée à un système de $2k+1$ droites passe par les $2k+1$ points attachés aux $2k+1$ systèmes de $2k$ droites qu'on peut déduire du système initial par la suppression d'une droite;

3° Le point attaché à un système de deux droites est leur point de rencontre.

De là il résulte que la circonférence attachée à un triangle est la circonférence circonscrite; puis que les quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles que l'on peut former avec quatre droites concourent en un point, qui est le point attaché au système des quatre droites.

Pour cinq droites, nous avons le théorème de Miquel; la circonférence de Miquel ainsi obtenue est celle qui est attachée au pentagone; puis nous voyons que les six circonférences de Miquel attachées aux six pentagones que l'on peut former avec six droites ont un point commun; etc.

C'est ce théorème de Clifford que je me propose de démontrer ici par les méthodes mêmes de Clifford et de Miquel.

2. Nous ne considérerons que des courbes de classe n admettant la droite de l'infini pour tangente d'ordre $n-1$. A une telle courbe on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une direction donnée; donc une seule tangente parallèle à chaque direction isotrope. Elle n'a donc qu'un seul foyer. Pour la commodité, qualifions cette courbe de *monofocale*. Un point est une courbe monofocale de classe 1; une parabole est une courbe monofocale de classe 2.

L'équation tangentielle d'une courbe monofocale est de la forme

$$\varphi_n(u, v) + \varphi_{n-1}(u, v) = 0;$$

elle dépend d'une façon homogène de

$$(n+1) + (n) = 2n + 1 \text{ paramètres.}$$

Tangentiellement à $2p$ droites il y a donc une (et en général une seule) courbe monofocale de classe p; son foyer sera le point attaché au système des $2p$ droites. Tangentiellement à $2k+1$ droites données, il y a un système de courbes monofocales de classe $k+1$ qui dépendent linéairement d'un paramètre. A chaque courbe de ce faisceau tangentiel on peut faire correspondre une tangente isotrope issue du point cyclique I et une tangente issue du point cyclique J; d'ailleurs, tangentiellement à une droite isotrope, il n'existe qu'une courbe de la famille, puisque cette courbe est alors déterminée par $2k+2$ tangentes. Donc les tangentes issues de I et de J aux courbes de la famille se correspondent homographiquement. Le lieu du point de rencontre de ces tangentes, c'est-à-dire le lieu du foyer des courbes du faisceau, est donc une circonférence. C'est la circonférence qui sera attachée au système des $2k+1$ droites.

Il reste à vérifier que les trois conditions indiquées sont bien vérifiées. Cela est évident pour la troisième.

Pour la première aussi puisque la courbe monofocale de classe p tangente à $2p$ droites, étant tangente à $2p-1$ quelconques de ces droites, fait partie de la famille des courbes monofocales de classe p tangentes à ces $2p-1$ droites.

Pour s'assurer que la seconde condition est remplie, il suffit de remarquer que, parmi les courbes monofocales de classe $k+1$ tangentes à $2k+1$ droites, se trouvent les courbes constituées par le point à l'infini de l'une des droites et la courbe monofocale de classe k tangente aux $2k$ autres droites.

Les théorèmes de Miquel et de Clifford sont donc démontrés. Cette démonstration est celle de Clifford.

3. La méthode beaucoup plus élémentaire qui conduisit Miquel à son théorème permet aussi d'obtenir la généralisation de Clifford.

Démontrons, avec Miquel, le lemme suivant : Soient quatre circonférences C_1, C_2, C_3, C_4; désignons par a_{ij}, A_{ij} les points communs aux deux circonférences C_i et C_j. *Si les points* a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41} *sont sur une même circonférence, il en est de même des points* A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}.

$abcd$ étant un quadrilatère, concave ou convexe, et la notation $\widehat{abc}$ désignant l'un quelconque des angles de premier côté ba et de second côté bc, la relation

$$\widehat{abc} + \widehat{cda} = k\pi,$$

dans laquelle k est un nombre entier positif, nul ou négatif, est la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points a, b, c, d appartiennent à une même circonférence ou soient en ligne droite.

Dans les conditions de l'énoncé, on a donc :

$$\widehat{A_{12}a_{12}a_{23}} + \widehat{a_{23}A_{23}A_{12}} = k\pi,$$

$$\widehat{a_{41}a_{12}A_{12}} + \widehat{A_{12}A_{41}a_{41}} = k\pi,$$

$$\widehat{A_{34}a_{34}a_{41}} + \widehat{a_{41}A_{41}A_{34}} = k\pi,$$

$$\widehat{a_{23}a_{34}A_{34}} + \widehat{A_{34}A_{23}a_{23}} = k\pi$$

et

$$\widehat{a_{41}a_{12}a_{23}} + \widehat{a_{23}a_{34}a_{41}} = k\pi;$$

la lettre k ne désignant pas toujours le même entier. Mais on peut prendre en particulier :

$$\widehat{a_{41}a_{12}a_{23}} = \widehat{a_{41}a_{12}A_{12}} + \widehat{A_{12}a_{12}a_{23}},$$
$$\widehat{a_{23}a_{34}a_{41}} = \widehat{a_{23}a_{34}A_{34}} + \widehat{A_{34}a_{34}a_{41}}$$

et poser

$$\widehat{A_{12}A_{41}A_{34}} = \widehat{A_{12}A_{41}a_{41}} + \widehat{a_{41}A_{41}A_{34}},$$
$$\widehat{A_{34}A_{23}A_{12}} = \widehat{A_{34}A_{23}a_{23}} + \widehat{a_{23}A_{23}A_{12}}.$$

Donc, en soustrayant la cinquième relation de la somme des quatre premières, on a

$$\widehat{A_{12}A_{41}A_{34}} + \widehat{A_{34}A_{23}A_{12}} = k\pi;$$

ce qui démontre le lemme. Mais, d'après la démonstration même, le lemme n'est exact que si l'on admet que la circonférence $A_1A_2A_3A_4$ puisse se réduire à une droite.

Remarquons d'ailleurs qu'une figure formée de droites et de circonférences est transformée en une figure formée uniquement de circonférences par une inversion convenable; les droites de la première figure étant transformées en circonférences passant par le pôle d'inversion. Donc on pourra, dans l'application du lemme de Miquel, considérer les droites comme des circonférences particulières qui ont en commun un point fictif que nous désignerons par le symbole ∞.

4. Nous allons maintenant démontrer de proche en proche le théorème de Clifford.

Les droites du système seront désignées par les chiffres 1, 2, 3, ... Par les symboles 12, 123, 1234, ..., on désignera respectivement les éléments (points ou circonférences) que le théorème de Clifford permet d'attacher respectivement aux systèmes 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; ...,

12 est donc le point de rencontre de 1 et de 2; 123 est la circonférence circonscrite au triangle de côtés 1, 2, 3. Quant aux éléments 1234, 12345, ..., leur existence même est ce que nous allons démontrer. Dans ces notations l'ordre des chiffres n'importe pas.

Cas de quatre droites. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences ou droites 123, 3, 4, 124.

Les deux premières ont en commun 13 et 23. La deuxième et la troisième ont en commun 34 et ∞. La troisième et la quatrième 14 et 24. La quatrième et la première 12 et un autre point A. Or les points 13, ∞, 14, 12 appartiennent à la droite 1; donc les points 23, 34, 24 et A sont sur une circonférence; donc 234 passe par A.

De même 23, ∞, 24, 12 appartiennent à 2; donc 13, 34, 14 et A appartiennent à une circonférence; donc 134 passe par A.

Les quatre circonférences 123, 134, 124, 234 passent donc par le point A, qu'on désignera par 1234.

Cas de cinq droites. Théorème de Miquel. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences 123, 134, 145, 152 prises dans cet ordre. On trouve les couples de points communs 1234, 13; 1345, 14; 1245, 15; 1235, 12. Et comme 13, 14, 15, 12 sont sur la droite 1, il en résulte que 1234, 1345, 1245, 1235 sont sur une circonférence.

Faisant maintenant jouer à la droite 2 le rôle spécial que jouait avant la droite 1, on voit que 2134, 2135, 2145, 2345 sont aussi sur une circonférence.

Ces deux circonférences sont donc confondues, c'est la circonférence de Miquel 12345.

Cas de six droites. — Appliquons le lemme aux circonférences 56123, 563, 564, 56124 prises dans cet ordre. Elles nous donnent comme couples de points communs 5613, 5623; 5634, 56; 5614, 5624; 5612 et un autre point A. Or les points 5613, 56, 5614, 5612 appartiennent à la circonférence 561, donc les points 5623, 5634, 5624, A sont sur une circonférence; c'est-à-dire que la circonférence 56234 passe aussi par A.

De même les points 5623, 56, 5624, 5612 sont sur la circonférence 562; donc 5613, 5634, 5614, A sont sur une circonférence, c'est-à-dire que la circonférence 56134 passe aussi par A.

En faisant jouer à deux droites quelconques le rôle spécial des deux droites 56, on voit finalement que les six cercles de Miquel passent par le point A qu'on désignera par la notation 123456.

Cas de sept droites. — Appliquons le lemme aux quatre circonférences 67123, 67134, 67145, 67152 prises dans cet ordre. Nous avons les couples de points 671234, 6713; 671345, 6714; 671245, 6715; 671235, 6712. Et comme les quatre points nommés en second lieu dans chacun des couples sont sur la circonférence 671, les autres sont sur une circonférence. En permutant le rôle des droites 1 et 2, on verrait que le point 672345 est aussi sur cette dernière circonférence. Enfin, en faisant jouer le rôle spécial des droites 6 et 7 à deux autres droites, on voit finalement que tous les sept points tels que 123456 sont sur une circonférence 1234567.

Il est inutile de continuer. Si l'on remarque que pour passer du cas de quatre droites à celui de six droites il nous a suffi de répéter la démonstration relative au premier de ces cas en ajoutant à chaque symbole de point ou de circonférence les deux chiffres 5, 6 et aussi que, pour passer du cas de cinq droites à celui de sept, nous avons ajouté simplement 6 et 7 à tous les symboles employés, on a la clef des généralisations successives.

5. Quelle que soit la méthode de démonstration que l'on adopte, il faudrait la compléter par l'examen des cas particuliers dont je vais dire rapidement quelques mots en m'appuyant surtout sur le mode de raisonnement de Clifford. Pour éviter des difficultés accessoires je ne considérerai que les systèmes de droites réelles et non parallèles deux à deux.

a. Si une courbe monofocale est tangente à la droite de l'infini en l'un des points cycliques, son foyer est confondu avec l'autre point cyclique.

Lorsqu'une courbe satisfaisant à la définition posée pour les courbes monofocales est tangente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques, elle n'a en réalité pas de foyer; nous conviendrons de dire qu'elle a comme foyer le point fictif ∞ commun à toutes les droites du plan, voici pourquoi :

Considérons un système de $2k+1$ droites et, comme au n° 2 le faisceau tangentiel des courbes monofocales de classe k tangentes à ces droites. Le lieu des foyers de ces courbes a été obtenu par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets I et J. Pour que ce lieu soit une droite et non une circonférence, il faut et il suffit qu'à la droite de l'infini, considérée comme rayon du faisceau de sommet I, corresponde la droite de l'infini comme rayon du faisceau de sommet J.

C'est-à-dire qu'il faut que les $2k+1$ droites soient tangentes à une courbe monofocale de classe k tangente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques.

b. La partie d'une courbe monofocale qui est à distance finie, n'ayant qu'une seule tangente parallèle à une direction donnée, est indécomposable. Si donc une courbe monofocale est décomposable, elle se compose d'une courbe monofocale de classe inférieure et de points à l'infini.

Considérons un système de $2k$ droites; au n° 2 nous lui avons attaché une courbe monofocale de classe k. Cette courbe peut ne pas être déterminée d'une façon unique; s'il y en a deux, ces deux courbes ont en commun $(k-1)^2$ tangentes à l'infini et $2k$ à distance finie, donc k^2+1 tangentes communes. Ces deux courbes ont donc une partie commune, qui est une courbe monofocale et par suite elles ont le même foyer.

Ainsi le point attaché à un système de droites en nombre pair n'est jamais indéterminé; ce peut être le point fictif ∞.

c. A un système de $2k+1$ droites, nous avons attaché un faisceau tangentiel de courbes monofocales de classe k; ce faisceau peut être indéterminé, c'est-à-dire que les courbes de classe k tangentes aux $2k+1$ droites peuvent dépendre de plus d'un paramètre. On peut disposer de deux de ces paramètres pour rendre la courbe tangente à deux droites D_1 et D_2 parallèles entre elles, mais non parallèles aux droites du système donné. La courbe monofocale ainsi déterminée se décompose alors en le point à l'infini de D_1 et D_2 et une courbe monofocale de classe $k-1$ tangente aux droites du système, laquelle peut être elle aussi décomposable. Soit C la courbe monofocale de classe la plus petite possible qui soit tangente aux droites du système;

cette courbe C fait nécessairement partie de toutes les courbes de classe k tangentes aux droites du système. Donc toutes ces courbes ont le même foyer.

Donc la circonférence attachée à un système de droites en nombre impair $2k+1$ n'est jamais indéterminée; elle se réduit à une circonférence de rayon nul lorsque les $2k+1$ systèmes de $2k$ droites qu'on en peut déduire ont tous le même point associé.

Dans ce qui précède je n'ai pas invoqué explicitement les restrictions faites sur les systèmes de droites; mais on a compris que le fait que les droites étaient réelles permettait de ne pas s'occuper des courbes monofocales tangentes à la droite de l'infini en un seul des points cycliques ou des faisceaux de courbes monofocales ayant une tangente isotrope fixe et qu'en supposant les droites du système non parallèles deux à deux on écartait le cas où seule la partie à l'infini des courbes monofocales que l'on considérait aurait été déterminée par les tangentes données.

6. Il est facile de démontrer analytiquement le théorème de Clifford. Voici un procédé rapide :

Les droites du système seront représentées par des équations de la forme

$$u_i x - v_i y - 1 = 0,$$

dans lesquelles les deux coordonnées x et y sont isotropes, c'est-à-dire sont données en fonction de deux coordonnées rectangulaires X et Y par les formules

$$x = X + iY, \qquad y = X - iY.$$

Par la notation

$$|\, ux,\ u,\ vy,\ v\,|_{1,2,3,4},$$

par exemple, je désignerai le tableau carré ou déterminant dont les lignes se déduisent de celle écrite, en donnant à u et v successivement les indices indiqués 1, 2, 3, 4.

Par la notation

$$\| ux, u, vy, v, 1 \|_{1,2,3,4},$$

par exemple, je désignerai le tableau rectangulaire ou matrice qu'on obtient par le procédé qui vient d'être indiqué.

Je dirai, comme à l'habitude, qu'une matrice est nulle si les déterminants d'ordre le plus élevé possible qu'on en peut déduire sont tous nuls. Voici un lemme qu'il est commode d'énoncer :

Une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes est nulle si deux des déterminants à n^2 éléments qu'on en peut déduire sont nuls ; à moins que la matrice formée par les colonnes communes à ces deux déterminants ne soit nulle.

Soit par exemple la matrice

$$\| \alpha, \beta, a, b, c \|_{1,2,3,4} ;$$

supposons que les deux déterminants

$$| \alpha, a, b, c |_{1,2,3,4} ; \quad | \beta, a, b, c |_{1,2,3,4}$$

soient nuls et démontrons qu'il en est de même du déterminant

$$| \alpha, \beta, a, b |_{1,2,3,4}.$$

Par hypothèse il existe deux relations

$$\lambda \alpha + \mu a + \nu b + \varpi c = 0,$$
$$\lambda' \beta + \mu' a + \nu' b + \varpi' c = 0,$$

valables pour les valeurs 1, 2, 3, 4 des indices. Si ϖ est nul, le théorème est démontré puisque alors la matrice

$$\| \alpha, a, b \|_{1,2,3,4}$$

est nulle. De même, si ϖ' est nul.

Si $\varpi\varpi'$ n'est pas nul, on peut éliminer c entre les relations précédentes. Cela donne :

$$\lambda\varpi'\alpha - \lambda'\varpi\beta + (\mu\varpi' - \mu'\varpi)a - (\nu\varpi' - \nu'\varpi)b = 0,$$

relation dont tous les coefficients ne sont nuls que si λ et λ' sont nuls ; or cela n'a lieu que si la matrice

$$\| a, b, c \|_{1,2,3,4}$$

est nulle.

7. *Cas de deux droites.* — En éliminant successivement y, puis x, entre les deux équations des droites 1, 2, notations du n° 4, on voit que les coordonnées de leur point de rencontre 12 satisfont aux relations

$$| ux + 1, v |_{1,2} = 0; \qquad | vy + 1, u |_{1,2} = 0.$$

On peut encore écrire ces relations sous la forme

$$| u(ux + 1), uv |_{1,2} = 0; \qquad | v(vy + 1), uv |_{1,2} = 0.$$

Cas de trois droites. — Considérons l'équation

$$| u(ux + 1), v(vy + 1), uv |_{1,2,3} = 0;$$

étant de premier degré en x et en y elle représente une circonférence. D'après le lemme, cette circonférence passe par les points 12 ; 23 ; 31, sauf peut-être si tous les produits uv sont nuls, c'est-à-dire si toutes les droites sont isotropes, cas que nous laissons de côté. On a donc là l'équation de la circonférence 123.

Cas de quatre droites. — L'équation de la circonférence 123 est la condition que doivent vérifier x et y pour qu'il existe des nombres λ, μ, ν, non tous nuls, vérifiant les trois relations de la forme

$$\lambda u(ux+1)+\mu v(vy+1)+\nu uv=0,$$

obtenues en affectant les lettres u et v des indices 1, 2, 3.

Considérons les quatre relations obtenues à l'aide des indices 1, 2, 3, 4. Entre ces relations, éliminons d'abord λ, μy, μ, ν, puis λx, λ, μ, ν; nous obtenons les équations

$$|\, u(ux+1),\ v^2,\ v,\ uv\,|_{1,2,3,4}=0;$$
$$|\, v(vy+1),\ u^2,\ u,\ uv\,|_{1,2,3,4}=0$$

qui déterminent x et y de façon que les quatre relations aient une solution commune en λ, μ, ν. Le point x, y est donc commun aux quatre circonférences 123, 234, 341, 412. C'est le point 1234. Nous écrirons les équations qui déterminent ce point sous la forme

$$|\, u^2(ux+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv\,|_{1,2,3,4}=0;$$
$$|\, v^2(vy+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv\,|_{1,2,3,4}=0.$$

Cas de cinq droites. — L'équation

$$|\, u^2(ux+1),\ v^2(vy+1),\ u^2v,\ uv^2,\ uv\,|_{1,2,3,4,5}=0$$

représente évidemment une circonférence qui, d'après le lemme, contient les cinq points tels que 1234, sauf peut-être dans le cas où la matrice

$$\|\, u^2v,\ uv^2.\ uv\,\|_{1,2,3,4,5}=0$$

serait nulle. Or, dans ce cas, en supposant toujours les droites non isotropes, elles devaient toutes passer par un même point P. Tous les points tels que 1234 seraient en P et l'existence d'une circonférence contenant tous ces points 1234 ne se pose alors pas.

Cas de six droites. — On voit de suite que le point attaché au système est donné par

$$|\,u^3(ux+1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6}=0;$$
$$|\,v^3(vy-1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6}=0.$$

Cas de sept droites. — La circonférence attachée à sept droites est

$$|\,u^3(ux+1),\ v^3(vy-1),\ u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3.\ u^2v, uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6,7}=0.$$

Il ne saurait y avoir doute que pour le cas où la matrice

$$\|\,u^3v,\ u^2v^2,\ uv^3,\ u^2v,\ uv^2\,|_{1,2,3,4,5,6,7}$$

serait nulle.

En écartant le cas des droites isotropes, ce qui permet de diviser par uv, on reconnaît dans la relation obtenue la condition pour que les sept droites soient tangentes à une même parabole, auquel cas, d'après le n° 5, la circonférence attachée aux sept droites se réduit au foyer de cette parabole. Mais il est inutile de recourir au raisonnement de Clifford. En divisant la matrice par le produit des v elle s'écrit

$$\|\,u^3,\ u^2,\ u^2v,\ uv^2,\ uv\,\|_{1,2,3,4,5,6}=0,$$

et, en se reportant à l'équation qui donne l'x du point attaché à un système de quatre droites, on voit qu'elle exprime que tous les points tels que 1234 ont la même abscisse. Mais on voit aussi qu'elle exprime que tous ces points ont la même ordonnée, donc finalement elle exprime que tous les points 1234 sont confondus. Et il est facile de conclure.

8. Cette démonstration analytique montre, plus nettement encore peut-être que les précédentes, qu'il s'agit seulement d'une des interprétations géométriques dont est susceptible un théorème, que je n'énonce pas, sur les correspondances homographiques ayant un couple homologue commun. Dans le numéro précédent les deux variables sont x, y et le couple commun est ∞, ∞.

Si l'on reprend les raisonnements des nos 3 et 4 en y remplaçant les relations d'angle par des égalités de rapports anharmoniques, on aura une démonstration géométrique générale de ce théorème sur les correspondances homographiques. Le lecteur pourra chercher d'autres interprétations géométriques de ce théorème en géométrie plane et en géométrie dans l'espace.

Il s'agit ici de correspondances homographiques entre deux variables, donc, si l'on veut, entre deux droites. Y a-t-il une proposition analogue pour les correspondances homographiques entre plans?

J'appelle aussi l'attention sur une proposition de Miquel, généralisation à l'espace du lemme du n° 3, qu'il y aurait intérêt à étudier. On la trouvera dans les Mémoires cités.