NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Sur la parabole tangente à quatre droites

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 455-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__455_0>

[L[1] 13a]

SUR LA PARABOLE TANGENTE A QUATRE DROITES;

Par M. E.-N. BARISIEN.

Soient les quatre droites

$$y = m_1 x + p_1, \qquad y = m_2 x + p_2,$$
$$y = m_3 x + p_3, \qquad y = m_4 x + p_4.$$

L'équation à trouver doit être de la forme

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos\varphi + y \sin\varphi - a)^2.$$

La condition de tangence d'une droite

$$(2) \qquad y = mx + p$$

avec la parabole (1) s'obtiendra en exprimant que le symétrique Q du foyer F(α, β), par rapport à la droite (2), est sur la directrice

$$(3) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - a = 0.$$

La projection P de F sur la droite (2) s'obtient en résolvant les deux équations

$$y = mx + p, \qquad y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha),$$

ce qui donne, pour les coordonnées de P,

$$x_P = \frac{\alpha + \beta m - pm}{1 + m^2}, \qquad y_P = \frac{m\alpha + \beta m^2 + p}{1 + m^2}.$$

On a, pour celles de Q,

$$x_Q = 2x_P - x_F = \frac{2(\alpha + \beta m - pm)}{1+m^2} - \alpha$$
$$= \frac{\alpha(1-m^2) + 2\beta m - 2pm}{1+m^2},$$

$$y_Q = 2y_P - y_F = \frac{2(m\alpha + m^2\beta + p)}{1+m^2} - \beta$$
$$= \frac{2m\alpha - \beta(1-m^2) + 2p}{1+m^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), on a

$$\frac{[\alpha(1-m^2) + 2\beta m - 2pm]\cos\varphi}{1+m^2} + \frac{[2m\alpha - \beta(1-m^2) + 2p]\sin\varphi}{1+m^2} - a = 0,$$

ou

$$(4) \quad \begin{aligned} &\alpha[(1-m^2)\cos\varphi + 2m\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m\cos\varphi - (1-m^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1+m^2) + 2p(\sin\varphi - m\cos\varphi) = 0. \end{aligned}$$

La condition de tangence de la parabole (1) aux quatre droites données conduit donc aux quatre relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha[(1-m_1^2)\cos\varphi + 2m_1\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_1\cos\varphi - (1-m_1^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1+m_1^2) + 2p_1(\sin\varphi - m_1\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1-m_2^2)\cos\varphi + 2m_2\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_2\cos\varphi - (1-m_2^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1+m_2^2) + 2p_2(\sin\varphi - m_2\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1-m_3^2)\cos\varphi + 2m_3\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_3\cos\varphi - (1-m_3^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1+m_3^2) + 2p_3(\sin\varphi - m_3\cos\varphi) = 0, \\ &\alpha[(1-m_4^2)\cos\varphi + 2m_4\sin\varphi] \\ &\quad + \beta[2m_4\cos\varphi - (1-m_4^2)\sin\varphi] \\ &\quad - a(1+m_4^2) + 2p_4(\sin\varphi - m_4\cos\varphi) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces quatre relations permettent de déterminer α, β, a et φ.

Comme α, β et a y entrent linéairement, on aura par leur élimination l'équation suivante en φ :

$$(6)\quad \begin{vmatrix} (1-m_1^2)\cos\varphi+2m_1\sin\varphi & 2m_1\cos\varphi-(1-m_1^2)\sin\varphi & p_1(\sin\varphi-m_1\cos\varphi) & 1+m_1^2 \\ (1-m_2^2)\cos\varphi+2m_2\sin\varphi & 2m_2\cos\varphi-(1-m_2^2)\sin\varphi & p_2(\sin\varphi-m_2\cos\varphi) & 1+m_2^2 \\ (1-m_3^2)\cos\varphi+2m_3\sin\varphi & 2m_3\cos\varphi-(1-m_3^2)\sin\varphi & p_3(\sin\varphi-m_3\cos\varphi) & 1+m_3^2 \\ (1-m_4^2)\cos\varphi+2m_4\sin\varphi & 2m_4\cos\varphi-(1-m_4^2)\sin\varphi & p_4(\sin\varphi-m_4\cos\varphi) & 1+m_4^2 \end{vmatrix}=0.$$

Or, cette équation est du troisième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Le problème paraît donc comporter *trois solutions*, alors qu'on sait qu'il n'y en a qu'une; car il est bien avéré qu'il n'existe qu'une seule parabole tangente à quatre droites !

L'équation (6) peut se simplifier un peu en posant

$$m_1=\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2},\qquad m_2=\operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2},$$
$$m_3=\operatorname{tang}\frac{\omega_3}{2},\qquad m_4=\operatorname{tang}\frac{\omega_4}{2}.$$

Alors

$$\sin\omega_1=\frac{2m_1}{1+m_1^2},\qquad \cos\omega_1=\frac{1-m_1^2}{1+m_1^2},\qquad \dots\dots$$

L'équation (6) peut donc s'écrire

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \cos(\varphi-\omega_1) & \sin(\varphi-\omega_1) & p_1\cos\frac{\omega_1}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_1}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_2) & \sin(\varphi-\omega_2) & p_2\cos\frac{\omega_2}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_2}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_3) & \sin(\varphi-\omega_3) & p_3\cos\frac{\omega_3}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_3}{2}\right) & 1 \\ \cos(\varphi-\omega_4) & \sin(\varphi-\omega_4) & p_4\cos\frac{\omega_4}{2}\sin\left(\varphi-\frac{\omega_4}{2}\right) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Cas particulier. — Les quatre droites sont :

$$y = 0, \quad y = x, \quad y = 2x + k, \quad y = -x + q.$$

Alors

$$m_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad p_2 = 0,$$
$$m_3 = 2, \quad p_3 = k, \quad m_4 = -1, \quad p_4 = q,$$

L'équation (6) devient

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 1 \\ 2\sin\varphi & 2\cos\varphi & 0 & 2 \\ 4\sin\varphi - 3\cos\varphi & 4\cos\varphi + 3\sin\varphi & k(\sin\varphi - 2\cos\varphi) & 5 \\ -2\sin\varphi & -2\cos\varphi & q(\sin\varphi + \cos\varphi) & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

J'ai pris ce cas particulier pour voir si l'équation en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ se simplifie. On a

$$4k(\sin\varphi - 2\cos\varphi) \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 1 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 1 \end{vmatrix}$$
$$- 2q(\sin\varphi + \cos\varphi)$$
$$\times \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 1 \\ 4\sin\varphi - 3\cos\varphi & 4\cos\varphi + 3\sin\varphi & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant les déterminants, on a

$$\begin{aligned} &2k(\sin\varphi - 2\cos\varphi) \\ &\quad \times [\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ &\quad\quad + \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi] \\ &\quad - q(\sin\varphi + \cos\varphi) \\ &\quad \times [5\cos^2\varphi + \sin\varphi(4\cos\varphi + 3\sin\varphi) \\ &\quad\quad - \sin\varphi(4\sin\varphi - 3\cos\varphi) \\ &\quad\quad - \cos\varphi(4\sin\varphi - 3\cos\varphi) \\ &\quad\quad - \cos\varphi(4\cos\varphi + 3\sin\varphi) + 5\sin^2\varphi] = 0, \end{aligned}$$

ou

$$4k(\sin\varphi - 2\cos\varphi) - q(\sin\varphi + \cos\varphi) \times 4 = 0,$$
$$k(\sin\varphi - 2\cos\varphi) - q(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0.$$

Alors

$$(8)\qquad (k-q)\operatorname{tang}\varphi = 2k+q,\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2k+q}{k-q}.$$

Dans ce cas, il n'y a qu'une valeur de φ : il n'y a bien qu'une seule parabole.

Mais, dans le cas général, l'équation reste du troisième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Tout cela est bien singulier !

Les quatre équations (5) deviennent

$$(9)\qquad \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi - a = 0,$$

$$(10)\qquad \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi - a = 0,$$

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\alpha(4\sin\varphi - 3\cos\varphi)\\ &+\beta(4\cos\varphi + 3\sin\varphi) - 5a = 2k(2\cos\varphi - \sin\varphi),\end{aligned}$$

$$(12)\qquad \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + a = q(\sin\varphi + \cos\varphi).$$

Les équations (9) et (10) donnent

$$(13)\qquad \alpha = a(\cos\varphi + \sin\varphi),\qquad \beta = a(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Ces valeurs étant portées dans (12), il vient

$$\begin{aligned}&a[(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi + (\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\varphi + 1]\\ &\quad = q(\sin\varphi + \cos\varphi),\end{aligned}$$

$$(14)\qquad 2a = q(\sin\varphi + \cos\varphi).$$

Or, d'après (8),

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{2k+q}{\sqrt{(2k+q)^2+(k-q)^2}} = \frac{2k+q}{\sqrt{5k^2+2q^2+2kq}},\\ \cos\varphi &= \frac{k-q}{\sqrt{5k^2+2q^2+2kq}}.\end{aligned}\right.$$

D'après (13) et (14), on a

$$\alpha = \frac{q}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)^2,\qquad \beta = \frac{q}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$a = \frac{q}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi),$$

et, d'après (15),

$$(16) \qquad \alpha = \frac{9qk^2}{2(5k^2+2q^2+2kq)},$$

$$(17) \qquad \beta = -\frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2+2q^2+2kq)},$$

$$(18) \qquad a = \frac{3kq}{2\sqrt{5k^2+2q^2+2kq}}.$$

L'équation de la parabole tangente aux quatre droites

$$y=0, \qquad y=x, \qquad y=2x+k, \qquad y=-x+q$$

est donc

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi-a)^2,$$

ou

$$(19) \qquad \left[x-\frac{9qk^2}{2(5k^2+2q^2+2kq)}\right]^2 + \left[y+\frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2+2q^2+2kq)}\right]^2 = \frac{1}{4(5k^2+2q^2+2kq)}[2(k-q)x+2(2k+q)y-3kq]^2.$$

Autre particularité curieuse. — Le procédé qui vient le plus naturellement à l'esprit pour exprimer que (1) est tangent à (2) consiste à former l'équation aux abscisses des points d'intersection de (1) et (2), et d'écrire que les deux valeurs de x sont égales.

Au lieu de trouver la relation (4), linéaire en α, β et a, on trouve une relation du second degré en α, β et a. Il faut qu'il y ait un *facteur parasite !*

Note de la Rédaction. — Il semble, au premier abord, que l'article précédent aurait pu faire l'objet d'une question analogue à celles qui prennent place dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens.* Mais l'énoncé en eût été d'une longueur excessive. A titre exceptionnel, nous avons donc accueilli la demande de M. Barisien, qui sollicite la résolution de l'équation (6) ou (7). Nous recevrons avec reconnaissance les observations de nos lecteurs à ce sujet; elles pourront faire l'objet d'articles figurant à la rubrique « Correspondance ».