NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 432-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__432_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1908.

(1901, p. 48.)

Un point matériel est sollicité par une force centrale qui est fonction de la distance du point au centre fixe et *est exprimée par $f(r)$: démontrer que le rayon de courbure des courbes tautochrones pour ladite force est donné par la formule*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{r\,dr}\left[r\sqrt{1-2K^2\frac{U(r)}{U'^2(r)}}\right] \quad (^1),$$

après avoir posé

$$U(r) = \int_r^{r_0} f(r)\,dr,$$

r_0 étant le rayon vecteur correspondant au point de tautochronisme. VITTORIO NOBILE.

SOLUTION
Par UN ABONNÉ.

Prenons dans le plan un système de coordonnées polaires r et θ, ayant pour origine le centre fixe. La condition de tautochronisme donne la relation

$$(1) \qquad U(r) - U(r_0) = -\frac{K^2 s^2}{2},$$

qui n'est autre, au fond, que l'équation de la courbe dans le système de coordonnées r et s.

D'autre part, d'après une formule connue, le rayon de courbure ρ est égal à

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

où p désigne la distance du pôle à la tangente de la courbe. En appelant V l'angle sous lequel le rayon vecteur coupe la courbe, on a

$$p = r\sin V = \frac{r^2\,d\theta}{ds} = r\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}.$$

En tirant la valeur de $\frac{dr}{ds}$ de la relation (1), en la portant dans la relation précédente et remplaçant ensuite p, dans l'expression du rayon de courbure, par sa valeur, on trouve la formule demandée.

(1) Formule rectifiée (voir *Nouvelles Annales*, 1901, p. 192, *errata*).

1950.

(1902, p. 576.)

D'un point M *du plan d'une ellipse on peut mener huit droites coupant l'ellipse en* N_1, N_2, N_3, ..., N_8, *sous un angle constant* θ. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_1^8 \overline{MN_i}^2 = \text{const.}$$

est une conique. E.-N. Barisien.

Solution
Par un Abonné.

Soient α, β les coordonnées de M et x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 8$) celles des points N_1, N_2, N_3, ..., N_8.

En désignant par m et m' les coefficients angulaires de la tangente à l'ellipse au point N_i et de la droite MN_i et posant $\operatorname{tang}\theta = k$, on doit avoir

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \pm k.$$

Choisissons le signe +, remplaçons m par sa valeur et supprimons provisoirement l'indice i pour simplifier l'écriture, nous trouvons

$$m' = \frac{ka^2y + b^2x}{kb^2x - a^2y}.$$

En exprimant que cette droite, de coefficient angulaire m', passe en M, nous obtenons

$$b^2x^2 + kc^2xy + a^2y^2 + b^2(k\beta - \alpha)x - a^2(k\alpha + \beta)y = 0.$$

En éliminant successivement x et y entre cette équation et celle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on arrive aux deux équations

$$\begin{aligned}
&k^2c^4x^4 - 2ka^2c^2(k\alpha + \beta)x^3 \\
&\qquad + a^2[a^2(k\alpha + \beta)^2 + b^2(k\beta - \alpha)^2 - k^2c^4]x^2 + \ldots = 0, \\
&k^2c^4y^4 + 2kb^2c^2(k\beta - \alpha)y^3 \\
&\qquad + b^2[b^2(k\beta - \alpha)^2 + a^2(k\alpha + \beta)^2 - k^2c^4]y^2 + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

qui donnent les x et les y des points N_1 à N_4.

En y changeant le signe de k on obtient

$$\begin{aligned}&k^2c^4x^4+2ka^2c^2(-k\alpha+\beta)x^3\\&\qquad+a^2[a^2(-k\alpha+\beta)^2+b^2(k\beta+\alpha)^2-k^2c^4]x^2+\ldots=0,\\&k^2c^4y^4+2kb^2c^2(k\beta+\alpha)y^3\\&\qquad+b^2[b^2(k\beta+\alpha)^2+a^2(k\alpha-\beta)^2-k^2c^4]y^2+\ldots=0,\end{aligned}$$

qui fournissent de même les coordonnées des points N_5 à N_8.

Cela posé on a

$$\sum_1^8\overline{MN}_i^2=\sum_1^8[(\alpha-x_i)^2+(\beta-y_i)^2];$$

c'est-à-dire

$$8(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\sum_1^8x_i-2\beta\sum_1^8y_i+\sum_1^8x_i^2+\sum_1^8y_i^2;$$

ou bien

$$\begin{aligned}8(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\sum_1^8x_i-2\beta\sum_1^8y_i+\left(\sum_1^4x_i\right)^2+\left(\sum_5^8x_i\right)^2\\+\left(\sum_1^4y_i\right)^2+\left(\sum_5^8y_i\right)^2-2\sum_1^4x_1x_2-2\sum_5^8x_5x_6\\-2\sum_1^4y_1y_2-2\sum_5^8y_5y_6.\end{aligned}$$

Cette quantité doit être égale à une constante $4h^2$.

Si, au moyen des équations ci-dessus, on calcule les quantités qui y figurent, on trouve d'abord

$$\sum_1^8x_i=\frac{4a^2\alpha}{c^2},\qquad\sum_1^8y_i=-\frac{4b^2\beta}{c^2}.$$

En calculant ensuite les autres quantités et les remplaçant dans la relation proposée, on trouve, après réductions et simplifications, que le lieu du point $M(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$\alpha^2\left(a^2-2b^2-\frac{b^2}{k^2}\right)+\beta^2\left(2a^2-b^2+\frac{a^2}{k^2}\right)=c^2(h^2-a^2-b^2).$$

C'est une conique ayant mêmes axes et même centre que l'ellipse donnée.

Remarques
Par l'Auteur.

I. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_1^4 \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = \text{const.} = 4p^2$$

est la conique

$$\left(a^2 - 2b^2 - \frac{b^2}{k^2}\right)x^2 + \left(2a^2 - b^2 + \frac{a^2}{k^2}\right)y^2 + \frac{2(k^2-1)}{k}(a^2+b^2)xy = c^2(2p^2 - a^2 - b^2).$$

II. *Le lieu des points* M *tels que*

$$\sum_5^8 \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = \text{const.} = 4q^2$$

est la conique

$$\left(a^2 - 2b^2 - \frac{b^2}{k^2}\right)x^2 + \left(2a^2 - b^2 + \frac{a^2}{k^2}\right)y^2 - \frac{2(k^2-1)}{k}(a^2+b^2)xy = c^2(2q^2 - a^2 - b^2).$$

III. Si $k^2 = \dfrac{b^2}{a^2 - 2b^2}$, lorsque $a > b\sqrt{2}$, la conique du lieu

$$\sum_1^8 \overline{\mathrm{MN}}_i^2 = 4h^2$$

se compose alors d'un système de deux droites parallèles au grand axe.

IV. Si $k = \pm 1$, cette conique devient

$$\alpha^2(a^2 - 3b^2) + \beta^2(3a^2 - b^2) = c^2(h^2 - a^2 - b^2).$$

V. Si $h^2 = a^2 + b^2$, quelle que soit la valeur de k, la conique se compose de deux droites qui passent par le centre de l'ellipse donnée.

VI. Les relations

$$\sum_1^8 x_i = \frac{4a^2\alpha}{c^2}, \qquad \sum_1^8 y_i = -\frac{4b^2\beta}{c^2}$$

sont indépendantes à la fois de l'angle dont la tangente est k, et de la longueur h.

Il en résulte que : *le rapport de l'ordonnée (ou de l'abscisse) du centre des moyennes distances des huit points* N_i *à l'ordonnée (ou l'abscisse) du point* M *est constant et égal à* $\frac{a^2}{2c^2}$ $\left(ou\ -\frac{b^2}{2c^2}\right)$.

VII. On a aussi la curieuse relation

$$\frac{\sum_1^4 x_1 x_2}{\sum_1^4 y_1 y_2} = \frac{\sum_5^8 x_5 x_6}{\sum_5^8 y_5 y_6} = \text{const.} = \frac{a^2}{b^2}.$$

VIII. On trouve encore les lieux suivants :

1° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 x_3 x_4 = \text{const.}, \\ ou\quad & y_1 y_2 y_3 y_4 = \text{const.}, \\ ou\quad & x_5 x_6 x_7 x_8 = \text{const.}, \\ ou\quad & y_5 y_6 y_7 y_8 = \text{const.} \end{aligned}$$

se compose chacun de deux droites parallèles.

2° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\frac{y_1}{x_1}\,\frac{y_2}{x_2}\,\frac{y_3}{x_3}\,\frac{y_4}{x_4} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{y_5}{x_5}\frac{y_6}{x_6}\frac{y_7}{x_7}\frac{y_8}{x_8} = \text{const.}$$

est chacun une hyperbole.

2012.

(1905, p. 144.)

Le polyèdre homogène à un seul côté de Möbius a six sommets pentaèdres A, B, C, D, E, F, *et dix faces triangulaires*

$$\text{BCD},\quad \text{CDE},\quad \text{DEF},\quad \text{EFB},\quad \text{FBC},$$
$$\text{ABD},\quad \text{ADF},\quad \text{AFC},\quad \text{ACE},\quad \text{AEB},$$

en mettant par exemple en évidence l'angle pentaèdre en A. *La quadrique qui touche les plans des faces autres que* EFD, *et celle qui touche les plans des faces autres que* EFB, *ont leurs points de contact avec le plan* ADB *en ligne droite avec* A, *puisqu'elles touchent cinq mêmes plans issus de* A; *démontrer que le conjugué harmonique de* A *par rapport à ces points de contact est sur* DB. (*On peut remplacer* A *par* C.) G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Le polyèdre de Möbius a un seul côté, et l'on a

$$F + S = A + 1.$$

On peut l'obtenir en partant d'une ligne brisée pentagonale BCDEF dont on mène les diagonales pour avoir cinq faces; ces diagonales forment une ligne brisée pentagonale BDFCE, et les cinq dernières faces sont les triangles qui ont pour bases les côtés de cette ligne brisée et pour sommet un point donné A.

Les deux points A et C jouent le même rôle dans la question, et il en est de même des deux points B et D; nous prendrons le tétraèdre ABCD comme tétraèdre de référence. Comme il s'agit de quadriques tangentes à des plans, nous emploierons des coordonnées tangentielles; les coordonnées tangentielles u, v, w, r d'un plan étant les produits par des constantes des distances des points A, B, C, D à ce plan, l'équation tangentielle d'un sommet A est $u=0$, c'est-à-dire que la coordonnée u est nulle pour tout plan passant en A, les équations tangentielles d'une arête AB sont $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire que u et v sont nulles pour tout plan passant par AB, et enfin on a $u=0$, $v=0$, $w=0$ pour le plan ABC.

Les deux quadriques sont tangentes aux plans BDC, BDA; la seule coordonnée non nulle étant u pour le premier plan, w pour le second, les équations tangentielles des deux quadriques manquent de termes en u^2 et en w^2; si l'on met en évidence les plans tangents menés par AC ($u=0$, $w=0$), ces équations sont de la forme

$$(1)\quad (v+ur)(r+mv)+v(au+cw)+r(\alpha u+\gamma w)+kuw=0.$$

Les deux quadriques ont cinq plans tangents communs issus de A, donc même cône circonscrit de sommet A ($u=0$); même observation pour le sommet C($w=0$); si l'équation ci-dessus représente la première quadrique, on aura l'équation de la seconde en remplaçant k par k'.

Les points de contact M et M' avec le plan ABD ont pour équations $f'_w=0$, $\varphi'_w=0$, ou

$$cv+\gamma r+ku=0, \qquad cv+\gamma r+k'u=0;$$

le point A est sur la droite qui joint ces deux points (on le sait *a priori*), ainsi que le point N qui a pour équation $cv+\gamma r=0$, point situé sur BD; M et M' seront conjugués par rapport aux points A et N si l'on a

$$k+k'=0.$$

Le point E est l'intersection des trois plans tangents EBA, EAC, ECD, et le point F est l'intersection des trois plans tangents FDA, FAC, FCB. On a pour les trois plans qui se coupent en E

$$\begin{array}{lll} u=0, & v=0, & \mu r+\gamma w=0, \\ u=0, & w=0, & v+\mu r=0, \\ w=0, & r=0, & mv+au=0; \end{array}$$

et, pour les trois plans qui se coupent en F,

$$\begin{array}{lll} u = 0, & r = 0, & mv + cw = 0, \\ u = 0, & w = 0, & r + mv = 0, \\ w = 0, & v = 0, & \mu r + \alpha u = 0; \end{array}$$

l'équation tangentielle du point E est alors

$$(\mathrm{E}) \qquad mv + au + m(\mu r + \gamma w) = 0,$$

et celle du point F est

$$(\mathrm{F}) \qquad \mu r + \alpha u + \mu(mv + cw) = 0.$$

La première quadrique doit être tangente au plan EFB, la seconde au plan EFD. L'équation du point B étant $v = 0$, les équations

$$au + m(\mu r + \gamma w) = 0, \qquad (\mu r + \alpha u) + \mu c w = 0,$$
$$\mu r^2 + r(\alpha u + \gamma w) + kuw = 0$$

doivent être compatibles; la dernière peut s'écrire

$$r(\mu r + \alpha u)\gamma w r + kuw = 0,$$

et elle devient, en tenant compte de la seconde et en supprimant le facteur w qui n'est pas nul,

$$(\gamma - \mu c)r + ku = 0;$$

on doit donc avoir, en considérant les trois équations linéaires et homogènes en u, w, r,

$$\begin{vmatrix} a & m\gamma & m\mu \\ \alpha & \mu c & \mu \\ k & 0 & \gamma - \mu c \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\gamma - \mu c)(m\mu k + \mu a c - m\alpha\gamma) = 0,$$
$$k = \frac{\alpha\gamma}{\mu} - \frac{ac}{m}.$$

Si l'on échange v et r dans l'équation (1), en échangeant les lettres romaines et les lettres grecques, cette équation se reproduit; les mêmes échanges ne font qu'échanger les points E et F; il en résulte que, pour la seconde quadrique qui doit être tangente au plan EFD, tandis que la première était tangente au plan EFB, on a

$$k' = \frac{ac}{m} - \frac{\alpha\gamma}{\mu} = -k;$$

c'est ce qu'il fallait obtenir.

2243.

(Énoncé complété : *voir* 1915, p. 143 et 1916, p. 47.)

Étant données deux droites D *et* Δ *rectangulaires, ne se rencontrant pas, et, dans un plan perpendiculaire à* D, *un cercle* C *ayant son centre* O *sur cette droite, on considère la surface réglée du quatrième ordre ayant pour directrices* D, Δ *et* C *(bien connue en stéréotomie comme constituant l'intrados de la voûte dite « arrière-voussure de Montpellier »).*

Démontrer « géométriquement » :

1° *Que la section de cette surface par tout plan perpendiculaire à* D *est une conchoïde de Nicomède de pôle* O;

2° *Que la section de la surface par tout plan* P *contenant le diamètre de* C *parallèle à* Δ *est une conique dont la projection sur le plan* Π *de* C *rencontre ce cercle en deux points fixes, réels ou imaginaires, admet pour foyer le point* O *et pour directrice correspondant à ce foyer la projection, sur le plan* Π, *de la trace du plan* P *sur celui mené par* Δ *parallèlement à* Π.

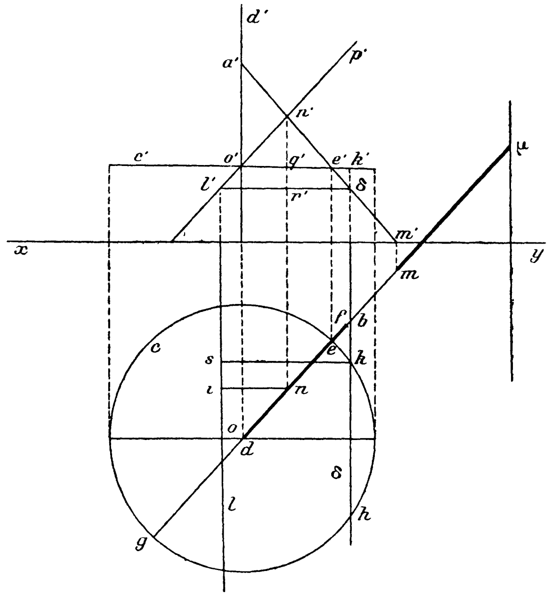
M. d'Ocagne.

Solution
Par M. J. Lemaire.

1° Prenons le plan sécant pour plan horizontal de projection, et un plan perpendiculaire à Δ pour plan vertical, et soient (d, d'), (δ, δ'), (c, c') les trois directrices de la surface; construisons une génératrice qui s'appuie sur elles en (d, a'), (b, δ') et (e, e') respectivement, et a pour trace horizontale (m, m') : on a

$$\frac{mb}{me} = \frac{m'\delta'}{m'e'} = \text{const},$$

soient k cette constante et f le point de om tel que $\frac{fo}{fg} = k$, en désignant par g le point diamétralement opposé à e sur le cercle c, et par (o, o') le centre du cercle.



Sur la droite om, prenons le point μ tel que $m\mu = of$, et prouvons que le lieu de μ est une droite : les segments de droite qui entrent dans les égalités étant supposés affectés de signes, nous pouvons écrire

$$mb = k.me,$$
$$m\mu = k.gf,$$

d'où

$$\begin{aligned} bm + m\mu &= k(em + gf), \\ &= k(em + go + of), \\ &= k(oe + em + m\mu), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$b\mu = k.o\mu,$$

égalité qui prouve que μ décrit une parallèle à δ, et, puisque $m\mu$ a une longueur constante, que le lieu de m est une *conchoïde de Nicomède.*

2° Le plan P est de bout, et sa trace verticale p' passe en o'; (n, n') étant le point où il coupe la génératrice considérée ci-dessus, il s'agit d'obtenir le lieu de n.

Soient (l, l') la droite de bout du plan P située dans le plan horizontal contenant Δ, ni la distance de n à l, q' et r' les points où la ligne de rappel nn' rencontre c' et $\delta' l'$, k' celui où la ligne de rappel de δ' rencontre c', k et h les points communs à cette ligne et à c, s la projection de k sur l; la figure donne

$$\frac{no}{ni} = \frac{no}{r'l'},$$
$$\frac{r'l'}{\delta'l'} = \frac{q'o'}{e'o'} = \frac{no}{eo},$$

d'où

$$\frac{no}{ni} = \frac{eo}{\delta'l'} = \frac{ko}{ks} = \text{const.};$$

le lieu de n est donc la conique admettant o pour foyer, l pour directrice correspondante, et passant par les points, réels ou imaginaires, où la droite δ coupe le cercle c.

Autres solutions de MM. R. Bouvaist et M. Faucheux.

2246.

(1915, p. 144.)

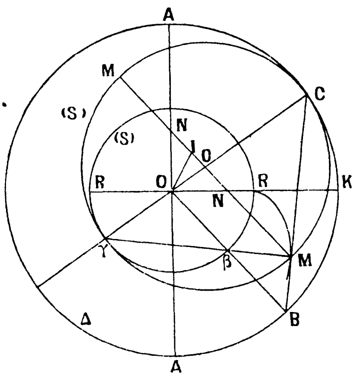
On fait rouler intérieurement un cercle, de rayon $\frac{3a}{2}$, *sur un cercle de rayon* a *et l'on demande : l'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile invariablement lié à ce cercle; le lieu des extrémités de ce diamètre.*

F. Balitrand.

Solution
Par M. J. Lemaire.

Rappelons que si un cercle (S') de rayon $r' = \frac{(n+1)r}{n}$ roule sur un cercle fixe S de rayon r, n étant un nombre entier, de manière que ces cercles soient tangents intérieurement, tout point du cercle mobile décrit une épicycloïde à n rebroussements, et que si un cercle S'' de rayon $r'' = \frac{(n-1)r}{n}$ roule sur le même cercle fixe (S), ces deux cercles étant encore tangents intérieurement, tout point du cercle mobile décrit une hypocycloïde à n rebroussements.

Donc si $r = a$, et $r' = \frac{3a}{2}$, les extrémités d'un diamètre MM du cercle (S') décrivent chacune une néphroïde, les points de rebroussement de ces deux épicycloïdes sont les extrémités de deux diamètres rectangulaires du cercle (S).



D'autre part, on sait que si un cercle (S') roule sur un cercle fixe (S), un diamètre MM du cercle mobile enveloppe la courbe décrite par un point du cercle (Σ), de rayon moitié de celui de (S'), touchant (S) au même point et de la même manière que (S') [*voir*, par exemple, le *Cours de Géométrie* de Mannheim].

Dans le cas actuel, le rayon de (Σ) valant $\frac{3a}{4}$, MM enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements qui se confondent avec les rebroussements des deux épicycloïdes précédentes.

Nous allons établir autrement ces résultats. Soient O le centre du cercle fixe (S), O' celui du cercle mobile (S') pour une position arbitraire de ce cercle, RM l'arc de la courbe (E) lieu de M à partir de la position où ce point coïncidait avec le point de contact des deux cercles, γ le point de contact de (S) et (S'), C le point diamétralement opposé à γ sur (S'), (Δ) le cercle de centre O et de rayon $2a$, qui touche (S') en C, Mγ est la normale en M à (E), MC la tangente, si B est le second point où MC coupe (Δ) et β le second point où $M\gamma$ coupe (S), OB passe en β et est parallèle à MM'. Le rayon OR coupant (Δ) en K, prenons dans le sens de B vers C, l'arc KA égal à un quadrant; si ω désigne la mesure en degrés de l'angle $\widehat{O\gamma\beta}$, l'arc γM vaut $(180 - 2\omega)$ degrés, l'arc γR de même longueur vaut $\frac{3}{2}(180 - 2\omega)$ degrés; par suite, l'arc BK vaut, comme l'arc BR, un nombre de degrés égal à la différence des nombres qui expriment les arcs γR et $\gamma\beta$, c'est-à-dire $(90 - \omega)$ degrés.

Il en résulte que l'arc AB contient ω degrés; et puisque l'arc BC en contient 2ω, l'arc AC est le triple de l'arc AB : donc, d'après le mode de génération tangentielle des épicycloïdes, la droite BC, tangente en M à la courbe (E) lieu de ce point, enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements, dont les sommets sont les points A et A' diamétralement opposés de (Δ) et les rebroussements les points R et R' diamétralement opposés de (S).

Le lieu de M' est la courbe obtenue en faisant tourner la précédente de 90° autour de O.

Observons que M est au quart de BC à partir de B.

Il serait aisé d'obtenir pour l'enveloppe de MM' un mode de génération tangentielle analogue; mais on peut aussi trouver cette enveloppe comme il suit : N et N' désignant les points où MM' coupe RR' et AA', l'angle $\widehat{ON'N}$ vaut, comme $\widehat{AOB}$, ω degrés: $\widehat{OO'N'} = \widehat{COB} = 2\omega$; si donc I est le point de NN' tel que $\widehat{OIN} = 2\omega$, ce point est le milieu de NN'; et comme $OI = OO' = \frac{a}{2}$, le segment de droite NN' est égal au rayon a de (S), et la droite MM' enveloppe l'hypocycloïde ayant pour rebroussements les points R et R' de ce cercle et les extrémités du diamètre perpendiculaire à RR'.

Autre solution, de l'auteur.

2251.

(1915, p. 391.)

Les coordonnées tétraédriques d'une droite MM' *étant* *les quantités*

$$l = yz' - zy', \qquad m = zx' - xz', \qquad n = xy' - yx',$$
$$\lambda = xt' - tx', \qquad \ldots$$

la quadrique qui a pour équation ponctuelle

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$$

a pour équation en coordonnées de droites tangentes

$$(l\sqrt{BC} + \lambda\sqrt{AD})^2 + (m\sqrt{CA} + \mu\sqrt{BD})^2 + \ldots = 0,$$

ou encore

$$(l\sqrt{BC} - \lambda\sqrt{AD})^2 + (m\sqrt{CA} - \mu\sqrt{BD})^2 + \ldots = 0$$

avec

$$\sqrt{BC}\sqrt{AD} = \sqrt{CA}\sqrt{BD} = \sqrt{AB}\sqrt{CD}.$$

Les génératrices sont données par les relations

$$\begin{aligned} l\sqrt{BC} &= \varepsilon\lambda\sqrt{AD} \\ m\sqrt{CA} &= \varepsilon\mu\sqrt{BD} \qquad (l\lambda + m\mu + n\nu = 0). \\ n\sqrt{AB} &= \varepsilon\nu\sqrt{CD} \end{aligned}$$

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

L'équation aux ρ des points d'intersection de MM′ avec la quadrique donnée est

$$\begin{aligned} \rho^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2) \\ + 2\rho(Axx' + Byy' + Czz' + Dtt') \\ + Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dt'^2) = 0. \end{aligned}$$

MM′ sera tangente à cette surface si l'on a

$$\begin{aligned} (Axx' + Byy' + Czz' + Dtt')^2 \\ - (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2) \\ \times (Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dt'^2) = 0, \end{aligned}$$

expression qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}&AB(xy'-yx')^2+AC(xz'-zx')^2+AD(xt'-tx')^2\\&\quad+BC(yz'-zy')^2+BD(yt'-ty')^2+CD(zt'-tz')^2=0,\end{aligned}$$

ou encore, en supposant

$$\sqrt{BC}\sqrt{AD}=\sqrt{CA}\sqrt{BD}=\sqrt{AB}\sqrt{CB}=\sqrt{ABCD},$$

$$\begin{aligned}&(l\sqrt{BC}\pm\lambda\sqrt{AD})^2+[m\sqrt{CA}\pm\mu\sqrt{BD}]^2\\&\qquad+[n\sqrt{AB}\pm\nu\sqrt{CD}]^2=0,\end{aligned}$$

puisque

$$l\lambda+m\mu+n\nu\equiv 0.$$

Et si l'on a

$$\begin{aligned}l\sqrt{BC}&=\varepsilon\lambda\sqrt{AD},\\m\sqrt{CA}&=\varepsilon\mu\sqrt{BD},\\n\sqrt{AB}&=\varepsilon\nu\sqrt{CD},\end{aligned}$$

la droite MM' sera sur la surface considérée, on retrouve ainsi les deux systèmes de génératrices.

2259

(1915, p. 4.)

Soit PQR *le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse* (E) *issues d'un point de cette ellipse. Démontrer que le triangle* PQR *est inscrit à une ellipse passant par les sommets de la développée de* (E).

T. Ono.

Solution

Par M. J. Lemaire.

Cette proposition a été obtenue comme conséquence de la question 1816. Mais en voici une démonstration directe : soit $M(\alpha, \beta)$ un point d'où partent quatre normales MA, Mp, Mq, Mr à l'ellipse (E) ; les tangentes à l'ellipse aux pieds de ces normales forment un quadrilatère complet dont P', Q', R' sont trois sommets situés sur la tangente en A, et P, Q, R les trois autres sommets respectivement opposés aux précédents ; les coordonnées de ces points sont liées à celles de M par les formules de Desboves

$$\alpha = -\frac{c^2 x(y^2 - b^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2},$$

$$\beta = \frac{c^2 y(x^2 - a^2)}{a^2 y^2 + b^2 x^2}.$$

Si nous écrivons que M est en A sur l'ellipse, nous obtenons le lieu géométrique de ces sommets

$$c^4 b^2 x^2 (y^2 - b^2)^2 + c^4 a^2 y^2 (x^2 - a^2)^2 - a^2 b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 = 0$$

ou

$$(c^4 x^2 y^2 - b^6 x^2 - a^6 y^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^4) = 0.$$

Le premier facteur donne le lieu de P', Q', R' qui est le lieu des pôles des normales de (E); l'autre donne le lieu de P, Q, R

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^4 = 0,$$

c'est l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée, ce qui démontre la proposition.

On peut encore l'établir comme il suit : on sait que P est le *centre* de Ap, en appelant *centre d'une droite* le point dont les projections sur les axes sont symétriques, par rapport à l'origine, des traces de la droite sur les mêmes axes. Si donc M vient en A, sur l'ellipse, P, Q, R sont les centres des normales issues de A; or nous avons démontré (*N. A.*, 1915, p. 304) que le lieu des centres des normales est l'ellipse qui a ses sommets aux points de rebroussement de la développée de (E); rappelons aussi que les normales à cette ellipse aux points P, Q, R concourent et que le cercle passant par ces points contient le centre de (E) (*N. A.*, 1915, p. 308 et 312).

Autre solution de M. R. Bouvaist. *Voir* aussi, p. 84, Corresp., M. F. Balitrand.