NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur certains systèmes d'équations indéterminées du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 401-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__401_0>

[I 19a]

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

M. Gérardin a proposé, dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, l'étude des systèmes d'équations indéterminées

$$\begin{aligned}(y-x)^2+x &= A^2,\\ (y-x)^2-y &= B^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 \pm x &= A^2,\\ (x+y+z)^2 \pm y &= B^2,\\ (x+y+z)^2 \pm z &= C^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2-(x+y) &= A^2,\\ (x+y+z)^2-(y+z) &= B^2,\\ (x+y+z)^2-(x+z) &= C^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y+z+t)^2-(x+y+z) &= A^2,\\ (x+y+z+t)^2-(x+y+t) &= B^2,\\ (x+y+z+t)^2-(x+z+t) &= C^2,\\ (x+y+z+t)^2-(y+z+t) &= D^2 \quad (^1).\end{aligned}$$

Nous nous proposons d'étudier ici ces deux systèmes généraux, que nous désignerons par I_n et II_n :

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_1 &= X_1,\\ (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_2 &= X_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_{n-1} &= X_{n-1},\\ (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2+x_n &= X_n\end{aligned}$$

(1) Pour les énoncés de ces questions, voir *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, question 4551, 1915, p. 193; questions 4560 et 4561, 1915, p. 197; question 4576, 1915, p. 221; question 4586, 1915, p. 245.

et

$$
\begin{array}{l}
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n\quad)=\mathrm{X}_1,\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n\quad)=\mathrm{X}_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_n\quad)=\mathrm{X}_{n-1},\\
(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)^2-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1})=\mathrm{X}_n,
\end{array}
$$

qui admettent les précédents comme cas particuliers. Nous indiquerons une méthode qui permet de trouver toutes leurs solutions entières et dont on peut déduire des formules très générales. En outre, au moyen de cette méthode, on peut toujours trouver des solutions de ces systèmes pour lesquelles $n-1$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont des signes donnés d'avance [1].

ÉTUDE DU SYSTÈME I_n.

1. Si l'on pose

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=t,$$

et si l'on ajoute les équations membres à membres, on voit que la résolution du système revient à celle de l'équation

$$nt^2+t=\mathrm{X}_1^2+\mathrm{X}_2^2+\ldots+\mathrm{X}_{n-1}^2+\mathrm{X}_n^2. \tag{1}$$

On a alors

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
x_1=\mathrm{X}_1^2-t^2, & x_2=\mathrm{X}_2^2-t^2, & \ldots,\\
x_{n-1}=\mathrm{X}_{n-1}^2-t^2, & x_n=\mathrm{X}_n^2-t^2. &
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

---

[1] Ainsi, pour le système II_4, M. Gérardin a signalé (*Intermédiaire*, 1915, p. 221) de nombreuses solutions numériques pour lesquelles deux au plus des inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sont positives, et a demandé si *trois* de ces inconnues peuvent être positives. Il résulte de la méthode que nous indiquons que, pour les deux systèmes étudiés, $n-1$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être positives, quel que soit n.

Posons

$$(3)\quad X_1 = t + p_1, \qquad X_2 = t + p_2, \qquad \ldots, \qquad X_{n-1} = t + p_{n-1};$$

on voit que, suivant que t sera positif ou négatif, les inconnues x_1, x_2, ..., x_{n-1} auront respectivement les mêmes signes que p_1, p_2, ..., p_{n-1} ou les signes contraires. Dans ce qui suit, nous désignerons par Σp et Σp^2 la somme des nombres p_1, p_2, ..., p_{n-1} et celle de leurs carrés.

Si l'on porte les valeurs (3) dans l'équation (1), on obtient

$$t^2 - (2\Sigma p - 1)t - \Sigma p^2 - X_n^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p - 1 \pm \sqrt{(2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2 + 4X_n^2}\right].$$

Or, le nombre

$$N = (2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

est de la forme $4m + 1$, pour toutes les valeurs des nombres p. Soit donc $N = a.b$; les nombres a et b sont tous deux de la forme $4m - 1$ ou tous deux de la forme $4m + 1$. Par suite, N est la différence de deux carrés dont le plus petit est pair; ce sont les carrés de

$$\frac{1}{2}(a + b), \qquad \frac{1}{2}(a - b).$$

On a donc

$$X_n = \frac{1}{4}(a - b),$$

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p - 1 \pm \frac{1}{2}(a + b)\right] = \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

et, suivant qu'on prend les signes supérieurs ou inférieurs, t est positif ou négatif.

Si l'on remarque en outre que, d'après les relations

(2) et (3), on a

$$x_1 = 2p_1 t + p_1^2, \qquad x_2 = 2p_2 t + p_2^2, \qquad \ldots,$$
$$x_{n-1} = 2p_{n-1} t + p_{n-1}^2,$$

on déduira aisément de ce qui précède le résultat suivant :

Ayant choisi $n-1$ nombres quelconques p_1, p_2, ..., p_{n-1}, on décompose le nombre

$$N = (2\Sigma p - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a et b; on aura alors des solutions du système I_n en prenant

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = p_1\left[2\Sigma p + p_1 \pm \frac{1}{2}(a+b\mp 2)\right], \\ x_2 = p_2\left[2\Sigma p + p_2 \pm \frac{1}{2}(a+b\mp 2)\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = p_{n-1}\left[2\Sigma p + p_{n-1} \pm \frac{1}{2}(a+b\mp 2)\right], \\ -x_n = \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2)\right](2\Sigma p - 1) + \Sigma p^2, \\ X_1 = p_1 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2), \\ X_2 = p_2 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} = p_{n-1} + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2), \\ X_n = \frac{1}{4}(a-b). \end{cases}$$

Suivant qu'on prend dans ces formules les signes supérieurs ou les signes inférieurs là où figurent les doubles signes, les valeurs des inconnues x_1, x_2, ..., x_{n-1} auront les mêmes signes que les nombres p_1, p_2, ..., p_{n-1}, ou les signes contraires.

Chaque groupe de $n-1$ nombres p quelconques donnera lieu, pour le système I_n, à plusieurs solutions dont le nombre dépend de la décomposition de N en facteurs.

2. Le résultat que nous venons de trouver conduit immédiatement à des formules très générales renfermant $n-1$ paramètres et donnant des solutions du système I_n; prenons, en effet, pour facteurs a et b le nombre N et l'unité. Un calcul simple montre qu'en employant dans (4) les signes supérieurs là où figurent les doubles signes, on a alors les formules générales suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= p_1[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_1],\\
x_2 &= p_2[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_2],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= p_{n-1}[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 + p_{n-1}],\\
-x_n &= [(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2\Sigma p - 1) + \Sigma p^2,\\
\mathrm{X}_1 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_1,\\
\mathrm{X}_2 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{X}_{n-1} &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + p_{n-1},\\
\mathrm{X}_n &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - \Sigma p.
\end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, on adopte dans (4) les signes inférieurs là où il y a des doubles signes, on trouve les formules

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= -p_1[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_1 + 2],\\
x_2 &= -p_2[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_2 + 2],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= -p_{n-1}[2(\Sigma p)^2 + 2\Sigma p^2 - 4\Sigma p - p_{n-1} + 2],\\
x_n &= [(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p + 1](2\Sigma p - 1) - \Sigma p^2,\\
\mathrm{X}_1 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_1 + 1,\\
\mathrm{X}_2 &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_2 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{X}_{n-1} &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - 2\Sigma p - p_{n-1} + 1,\\
\mathrm{X}_n &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 - \Sigma p.
\end{aligned}\right.$$

On déduit de (6) des formules très simples si l'on choisit des *nombres p dont la somme est nulle* [1]; on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= -p_1(2\Sigma p^2 - p_1 + 2),\\ x_2 &= -p_2(2\Sigma p^2 - p_2 + 2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ x_{n-1} &= -p_{n-1}(2\Sigma p^2 - p_{n-1} + 2),\\ x_n &= -(2\Sigma p^2 + 1),\\ X_1 &= \Sigma p^2 - p_1 + 1,\\ X_2 &= \Sigma p^2 - p_2 + 1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots,\\ X_{n-1} &= \Sigma p^2 - p_{n-1} + 1,\\ X_n &= \Sigma p^2. \end{aligned}\right.$$

Comme applications des résultats qui précèdent nous traiterons les cas de trois et de quatre équations, en donnant pour chaque formule quelques exemples numériques simples.

3. *Équation* I_2. — Pour $n = 2$, le système considéré devient

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 = X_1^2,$$
$$(x_1 + x_2)^2 + x_2 = X_2^2.$$

On a alors

$$N = a.b = (2p_1 - 1)^2 + 4p_1^2,$$

et les formules (4) s'écrivent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= p_1\left[3p_1 \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right],\\ -x_2 &= \left[p_1 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2)\right](2p_1 - 1) + p_1^2,\\ X_1 &= 2p_1 \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),\\ X_2 &= \frac{1}{4}(a - b). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Si l'on introduit cette même hypothèse dans les formules (5) on obtient des solutions dans lesquelles x_n est nul pour toutes valeurs des nombres p, quel que soit n.

Ainsi, pour $p_1 = -3$, on a

$$N = 85, \qquad a = 17, \qquad b = 5,$$

et l'on obtient la solution

$$x_1 = 63, \qquad x_2 = -72, \qquad X_1 = 12, \qquad X_2 = 3;$$

pour $p_1 = -4$, on a

$$N = 145, \qquad a = 29, \qquad b = 5,$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = 120, \qquad x_2 = -133, \qquad X_1 = 17, \qquad X_2 = 6;$$

pour $p_1 = -5$, on trouve

$$N = 221, \qquad a = 17, \qquad b = 13,$$

et l'on a

$$x_1 = 155, \qquad x_2 = -168, \qquad X_1 = 18, \qquad X_2 = 1.$$

D'autre part, les formules (5) deviennent ici

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1^2(4p_1+1), & X_1 &= p_1(2p_1+1), \\ x_2 &= -p_1^2(4p_1-1), & X_2 &= p_1(2p_1-1); \end{aligned}$$

elles donnent, par exemple, pour $p = 1$,

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -3, \qquad X_1 = 3, \qquad X_2 = 1;$$

pour $p_1 = 2$,

$$x_1 = 36, \qquad x_2 = -28, \qquad X_1 = 10, \qquad X_2 = 6;$$

pour $p_1 = 3$,

$$x_1 = 117, \qquad x_2 = -99, \qquad X_1 = 21, \qquad X_2 = 15.$$

De (6) on déduit encore ces formules donnant des solutions du système I_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -p_1(4p_1^2 - 5p_1 + 2), & X_1 &= 2p_1^2 - 3p_1 + 1, \\ x_2 &= 4p_1^3 - 7p_1^2 + 4p_1^2 - 1, & X_2 &= p_1(2p_1 - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve, pour $p_1 = -1$,

$$x_1 = 11, \qquad x_2 = -16, \qquad X_1 = 6, \qquad X_2 = 3;$$

pour $p_1 = -2$,

$$x_1 = 56, \qquad x_2 = -69, \qquad X_1 = 15, \qquad X_2 = 10;$$

pour $p_1 = -3$,

$$x_1 = 159, \qquad x_2 = -184, \qquad X_1 = 28, \qquad X_2 = 21.$$

Des formules (8) on peut encore déduire des formules générales en prenant pour p_1 une fonction d'un paramètre h, telle que le nombre N correspondant soit une fonction de h décomposable en un produit de deux facteurs Soit, par exemple, $p_1 = 1 - 5h$; on a alors successivement

$$N = 200h^2 - 60h + 5, \qquad a = 5, \qquad b = 40h^2 - 12h + 1,$$

et l'on obtient ces formules

$$\begin{aligned} x_1 &= -100h^3 + 125h^2 - 46h + 5, \qquad & X_1 &= 10h^2 - 13h + 3, \\ x_2 &= 100h^3 - 115h^2 + 38h - 3, \qquad & X_2 &= 10h^2 - 3h - 1. \end{aligned}$$

Posons encore

$$p_1 = 2h^4 + h^3 - 3h^2 + 2;$$

on a alors

$$\begin{aligned} N &= 32h^8 + 32h^7 - 88h^6 - 48h^5 + 128h^4 + 28h^3 - 84h^2 + 25 \\ &= (8h^4 - 10h^2 + 2h + 5)(4h^4 + 4h^3 - 6h^2 - 2h + 5), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} a &= 8h^4 - 10h^2 + 2h + 5, \\ b &= 4h^4 + 4h^3 - 6h^2 - 2h + 5, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2h^7 - h^6 - 4h^5 + 3h^4 + 2h^3 - 2h^2,\\
x_2 &= -2h^7 + h^6 + 4h^5 - 4h^4 - 2h^3 + 3h^2 - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= h^4 + h^3 - 2h^2 + 1,\\
X_2 &= h^4 - h^3 - h^2 + h;
\end{aligned}$$

on retrouve donc une formule de M. Gérardin (¹).

4. *Système* I_3. — Dans le cas où $n=3$, le système I_n s'écrit

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^2 + x_1 &= X_1^2,\\
(x_1+x_2+x_3)^2 + x_2 &= X_2^2,\\
(x_1+x_2+x_3)^2 + x_3 &= X_1^3.
\end{aligned}$$

On a dans ce cas

$$N = a.b = 8(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) - 4(p_1 + p_2) + 1,$$

et les formules (4) prennent la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= p_1\left[3p_1 + 2p_2 \pm \frac{1}{2}(a+b\mp 2)\right],\\
x_2 &= p_2\left[2p_1 + 3p_2 \pm \frac{1}{2}(a+b\mp 2)\right],\\
-x_3 &= \left[p_1 + p_2 \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2)\right](2p_1 + 2p_2 - 1) + p_1^2 + p_2^2;\\
X_1 &= 2p_1 + p_2 \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2),\\
X_2 &= p_1 + 2p_2 \pm \frac{1}{4}(a+b\mp 2),\\
X_3 &= \frac{1}{4}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Prenons, par exemple, $p_1 = 5$, $p_2 = -4$; on a alors $N = 165$, d'où $a = 15$, $b = 11$. On trouve ainsi

$$x_1 = 95,\quad x_2 = -40,\quad x_3 = -48,\quad X_1 = 12,\quad X_2 = 3,\quad X_3 = 1.$$

(¹) *Intermédiaire des Mathématiciens*, question 4551, 1915, p. 193.

Avec les mêmes valeurs de p_1 et p_2, on peut encore prendre $a=33$, $b=5$. On en déduit ces deux solutions

$$\begin{array}{lll} x_1 = 125, & x_2 = -64, & x_3 = -51, \\ X_1 = 15, & X_2 = 6, & X_3 = 7; \\ x_1 = -65, & x_2 = 88, & x_3 = -32, \\ X_1 = 4, & X_2 = 13, & X_3 = 7. \end{array}$$

De même, avec $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, on a $N = 45$ et, par suite, les deux décompositions $a=9$, $b=5$ et $a=15$, $b=3$; on obtient

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 28, & x_2 = 13, & x_3 = -35, & X_1 = 8, & X_2 = 7, & X_3 = 1; \\ x_1 = 32, & x_2 = 15, & x_2 = -40, & X_1 = 9, & X_2 = 8, & X_3 = 3. \end{array}$$

Posons encore $p_1 = 5$, $p_2 = -1$; on trouve

$$N = 153,$$

d'où

$$a = 17, \quad b = 9 \quad \text{ou} \quad a = 51, \quad b = 3.$$

On en déduit ces solutions :

$$\begin{array}{lll} x_1 = 125, & x_2 = -19, & x_3 = -96, \\ X_1 = 15, & X_2 = 9, & X_3 = 2; \\ x_1 = 195, & x_2 = -33, & x_3 = -145, \\ X_1 = 22, & X_2 = 16, & X_3 = 12; \\ x_1 = -75, & x_2 = -21, & x_3 = 44, \\ X_1 = 5, & X_2 = 11, & X_3 = 12. \end{array}$$

Si $p_1 = -p_2 = p$, on a $N = 8p^2 + 1$, et les formules (9) s'écrivent

$$x_1 = p\left[p \pm \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \qquad X_1 = p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

$$x_2 = p\left[p \mp \frac{1}{2}(a + b \mp 2)\right], \qquad X_2 = -p \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2),$$

$$x_3 = \pm \frac{1}{4}(a + b \mp 2) - 2p^2, \qquad X_3 = \frac{1}{4}(a - b).$$

Ainsi, avec $p = 2$, on a

$$\begin{array}{lll} x_1 = 16, & x_2 = -8, & x_3 = -5, \\ X_1 = 5, & X_2 = 1, & X_3 = 2; \end{array}$$

avec $p = 4$, on trouve ces deux solutions :

$$\begin{array}{lll} x_1 = 104, & x_2 = -72, & x_3 = -21, \\ X_1 = 15, & X_2 = 7, & X_3 = 10; \\ x_1 = -80, & x_2 = -112, & x_3 = -44, \\ X_1 = 8, & X_2 = 16, & X_3 = 10. \end{array}$$

Pour le système I_3, les formules (5) et (6) donnent les solutions générales suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1[4(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) + p_1], \\ x_2 &= p_2[4(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) + p_2], \\ -x_3 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2)(2p_1 + 2p_2 - 1) + p_1^2 + p_2^2, \\ X_1 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) + p_1, \\ X_2 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) + p_2, \\ X_3 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - p_1 - p_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= -p_1[4(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - 5p_1 - 4p_2 + 2], \\ x_2 &= -p_2[4(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - 4p_1 - 5p_2 + 2], \\ x_3 &= [2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - 2p_1 - 2p_2 + 1] \\ &\quad \times (2p_1 + 2p_2 - 1) - p_1^2 - p_2^2, \\ X_1 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - 3p_1 - 2p_2 + 1, \\ X_2 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - 2p_1 - 3p_2 + 1, \\ X_3 &= 2(p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2) - p_1 - p_2. \end{aligned}$$

Pour $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, ces deux formules donnent

$$\begin{array}{lll} x_1 = 29, & x_2 = 60, & x_3 = -75, \\ X_1 = 15, & X_2 = 16, & X_3 = 11; \\ x_1 = -17, & x_2 = -32, & x_3 = 40, \\ X_1 = 8, & X_2 = 7, & X_3 = 11. \end{array}$$

De (7) on déduit aussi cette solution générale, où l'on a posé $p_1 = -p_2 = p$,

$$\begin{aligned} x_1 &= -p(4p^2 - p + 2), & X_1 &= 2p^2 - p + 1, \\ x_2 &= p(4p^2 + p + 2), & X_2 &= 2p^2 + p + 1, \\ x_3 &= -(4p^2 + 1), & X_3 &= 2p^2. \end{aligned}$$

Par exemple, $p = 3$ donne

$$\begin{aligned} x_1 &= -105, & x_2 &= 123, & x_3 &= -37, \\ X_1 &= 16, & X_2 &= 22, & X_3 &= 18. \end{aligned}$$

On peut toujours déduire de (9) de nombreuses formules générales, si l'on prend pour p_1 et p_2 des fonctions d'un paramètre h telles que le nombre N correspondant soit toujours un produit de deux facteurs. Ainsi pour $p_1 = 1$, $p_2 = 3h - 1$, on trouve

$$N = 72h^2 - 36h + 9,$$

d'où l'on tire d'abord

$$a = 24h^2 - 12h + 3, \qquad b = 3.$$

On a alors les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= 3(4h^2 + 1), & X_1 &= 2(3h^2 + 1), \\ x_2 &= 36h^3 - 3h^2 - 1, & X_2 &= 3h(2h + 1), \\ x_3 &= -(36h^3 + 3h^2 + 1), & X_3 &= 3h(2h - 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= -12h^3 + 12h - 3, & X_1 &= 6h^2 - 6h + 1, \\ x_2 &= -36h^3 + 57h^2 - 30h + 5, & X_2 &= 6h^2 - 9h + 3, \\ x_3 &= 36h^3 - 51h^2 + 24h - 4, & X_3 &= 3h(2h - 1). \end{aligned}$$

Si l'on prend ensuite

$$a = 8h^2 - 4h + 1, \qquad b = 9,$$

on trouve ces solutions générales :

$$\begin{aligned} x_1 &= 4h^2 + 4h + 5, & X_1 &= 2h^2 + 2h + 3, \\ x_2 &= (3h - 1)(4h^2 + 7h + 3), & X_2 &= 2h^2 + 5h + 1, \\ x_3 &= -h(12h^2 + 19h + 4), & X_3 &= 2h^2 - h - 2 \end{aligned}$$

et

$$x_1 = -(4h^2 - 8h + 5), \qquad X_1 = 2h^2 - 4h + 2,$$
$$x_2 = -(3h - 1)(4h^2 - 11h + 7), \qquad X_2 = 2h^2 - 7h + 4,$$
$$x_3 = 12h^3 - 35h^2 + 28h - 5, \qquad X_3 = 2h^2 - h - 2.$$

Étude du système II_n.

5. Si l'on pose encore

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = t,$$

et si l'on ajoute les équations membres à membres, on voit que, pour résoudre le système II_n, il suffit de résoudre l'équation

$$(10) \qquad nt^2 - (n-1)t = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n-1}^2 + X_n^2.$$

Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont alors pour expressions

$$x_1 = X_1^2 - t^2 + t, \quad x_2 = X_2^2 - t^2 + t, \quad \ldots, \quad x_n = X_n^2 - t^2 + t.$$

Posons

$$(11) \quad X_1 = t + p_1, \quad X_2 = t + p_2, \quad \ldots, \quad X_{n-1} = t + p_{n-1};$$

suivant que t sera positif ou négatif, les inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ auront donc les signes de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ ou ceux de $-(p_1+1), -(p_2+1), \ldots, -(p_{n-1}+1)$. Désignons encore par Σp et Σp^2 la somme des $n-1$ nombres p et celle de leurs carrés; si l'on porte dans l'équation (10) les valeurs (11), on trouve

$$t^2 - (2\Sigma p + n - 1)t - \Sigma p^2 - X_n^2 = 0.$$

Considérons d'abord le cas où n est *impair*, et soit $n = 2k + 1$. On a alors

$$t = \Sigma p + k \pm \sqrt{(\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2 + X_n^2}.$$

Pour que le nombre

$$N = (\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2$$

soit une différence de deux carrés, il faut qu'il soit impair, ou multiple de 4.

Si k est impair, c'est-à-dire si n est de la forme $4m - 1$, le nombre N est toujours impair, puisque Σp et Σp^2 sont de même parité.

Supposons ensuite que k soit pair. Si Σp est pair, $(\Sigma p + k)^2$ est multiple de 4, et il faut, par suite, que Σp^2 soit aussi multiple de 4 ; il faut donc que le nombre de nombres p impairs soit nul ou multiple de 4. Si, au contraire, Σp est impair, $(\Sigma p + k)^2$ est de la forme $4m + 1$, et il faut que Σp^2 soit de la forme $4m - 1$. Par suite, le nombre des nombres p impairs doit être de la forme $4q - 1$.

En résumé, pour que N soit différence de deux carrés, les nombres p peuvent être quelconques, excepté que, si n est de la forme $4m + 1$, le nombre des nombres p impairs doit être de l'une des formes $4q$, $4q - 1$. Si l'on décompose le nombre N en deux facteurs de même parité a et b, on a

$$X_n = \frac{1}{2}(a - b), \qquad t = \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a + b),$$

et, suivant qu'on adopte dans l'expression de t le signe $+$ ou le signe $-$, t sera positif ou négatif.

En réunissant les considérations qui précèdent, on obtient le résultat suivant :

Si n est impair, on choisit $n - 1$ nombres p_1, $p_2, \ldots, p_{n-1}$ et l'on décompose le nombre

$$N = (\Sigma p + k)^2 + \Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a et b de même *parité; on a alors des solutions du système* II_n *en prenant*

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_1+1) + p_1^2,\\
x_2 &= \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_2+1) + p_2^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
x_{n-1} &= \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2p_{n-1}+1) + p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[\Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b)\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1 \quad + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b),\\
X_2 &= p_2 \quad + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1} + \Sigma p + k \pm \frac{1}{2}(a+b),\\
X_n &= \frac{1}{2}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Les nombres p sont quelconques; toutefois dans le cas où n est de la forme $4m+1$, *il faut que le nombre de nombres p impairs soit de l'une des formes* $4q$, $4q-1$. *Suivant qu'on prend dans les formules qui précèdent les signes supérieurs ou inférieurs là où figurent les doubles signes, les inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *auront les signes de* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *ou ceux de* $-(p_1+1)$, $-(p_2+1)$, $\ldots$, $-(p_{n-1}+1)$.

Supposons maintenant que n soit *pair;* on a alors

$$t = \frac{1}{2}\left[2\Sigma p + n - 1 \pm \sqrt{(2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2 + 4X_n^2}\right].$$

Le nombre

$$N = (2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

est alors toujours de la forme $4m+1$ et est, par suite, au moins d'une façon, la différence de deux carrés dont le plus petit est pair. Si $N = a.b$, on aura

$$X_n = \frac{1}{4}(a-b), \qquad t = \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),$$

et l'on obtient, par conséquent, ce résultat :

Si n est pair, on choisit $n-1$ nombres quelconques $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et l'on décompose le nombre

$$N = (2\Sigma p + n - 1)^2 + 4\Sigma p^2$$

en un produit de deux facteurs a, b; les formules suivantes donnent alors des solutions du système Π_n:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_1+1) + p_1^2,\\
x_2 &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_2+1) + p_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2p_{n-1}+1) + p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[\Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2)\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),\\
X_2 &= p_2 + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \pm 2n \mp 2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1} + \Sigma p \pm \frac{1}{4}(a+b \mp 2n \mp 2),\\
X_n &= \frac{1}{4}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ auront les signes de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ ou ceux de $-(p_1+1), -(p_2+1), \ldots,$

— $(p_{n-1}+1)$ *suivant qu'on prend dans ces formules les signes supérieurs ou inférieurs là où figurent des doubles signes.*

6. *Formules à $n-1$ paramètres.* — Comme nous l'avons fait pour le système I_n, nous pouvons déduire de ce qui précède des formules générales à $n-1$ paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$; nous considérons encore trois cas :

α. *n de la forme $4m-1$*; on a vu qu'alors N est toujours impair. Prenons donc $a = N$, $b = 1$; on obtient ainsi ces formules

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_2+1)+p_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2p_{n-1}+1)+p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2\right](2\Sigma p+n-2)+\Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
X_2 &= p_2+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1}+(1\pm k)\Sigma p \pm \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{2}\Sigma p^2 \pm \frac{1}{2}(k\pm 1)^2,\\
X_n &= k\Sigma p + \frac{1}{2}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{2}\Sigma p^2 + \frac{1}{2}(k^2-1).
\end{aligned}\right.$$

β. *n de la forme $4m+1$*; dans ce cas le nombre de nombres p impairs doit être de l'une des formes $4q$, $4q-1$ et N est toujours multiple de 4. Posons donc

$a = \frac{1}{2}N$, $b = 2$; on a alors

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \left[\left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2\right](2p_1 + 1) + p_1^2,\\
x_2 &= \left[\left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2\right](2p_2 + 1) + p_2^2.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[\left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2\right](2p_{n-1} + 1) + p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[\left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1 + \left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2,\\
X_2 &= p_2 + \left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1} + \left(1 \pm \frac{1}{2}k\right)\Sigma p \pm \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 \pm \frac{1}{4}\Sigma p^2 \pm \left(\frac{1}{2}k \pm 1\right)^2,\\
X_n &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 + \frac{1}{2}k\Sigma p + \frac{1}{4}k^2 - 1.
\end{aligned}
\right.
$$

γ. *n pair*. En prenant $a = N$ et $b = 1$ et en employant dans les formules (13) relatives à ce cas les signes supérieurs, on trouve les formules suivantes :

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1 &= \left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2\right](2p_1 + 1) + p_1^2,\\
x_2 &= \left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2\right](2p_2 + 1) + p_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-1} &= \left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2\right](2p_{n-1} + 1) + p_{n-1}^2,\\
-x_n &= \left[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2\right](2\Sigma p + n - 2) + \Sigma p^2;\\
X_1 &= p_1 + (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2,\\
X_2 &= p_2 + (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_{n-1} &= p_{n-1} + (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + n\Sigma p + \frac{1}{4}n^2,\\
X_n &= (\Sigma p)^2 + \Sigma p^2 + (n - 1)\Sigma p + \frac{1}{4}n(n - 2).
\end{aligned}
\right.
$$

Avec les signes inférieurs on trouve de même

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
x_1 &= -\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2\right](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= -\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2\right](2p_2+1)+p_2^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
x_{n-1} &= -\left[(\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2\right](2p_{n-1}+1)+p_{n-1}^2;\\
X_1 &= (\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p-p_1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2,\\
X_2 &= (\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p-p_2+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
X_{n-1} &= (\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-2)\Sigma p-p_{n-1}+\left(\frac{1}{2}n-1\right)^2,\\
X_n &= (\Sigma p)^2+\Sigma p^2+(n-1)\Sigma p+\frac{1}{4}n(n-2).
\end{aligned}\right.$$

Il y a lieu d'observer que les formules qui précèdent prennent une forme simple si l'on choisit des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ dont la somme est nulle.

Nous appliquerons ces considérations générales aux cas de $n=3$, $n=4$, $n=5$, qui fournissent des exemples des trois cas que nous venons d'envisager.

7. *Système* II_3. — Pour $n=3$, on a le système

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^2-(x_2+x_3) &= X_1^2,\\
(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1+x_3) &= X_2^2,\\
(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1+x_2) &= X_3^2.
\end{aligned}$$

Le nombre N a alors pour expression

$$N = a.b = 2(p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_1+p_2)+1,$$

et l'on a, d'après (12),

$$(18)\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_2+1)+p_2^2,\\
-x_3 &= \left[p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1\right](2p_1+2p_2+1)+p_1^2+p_2^2;\\
X_1 &= 2p_1+p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1,\\
X_2 &= p_1+2p_2\pm\frac{1}{2}(a+b)+1,\\
X_3 &= \frac{1}{2}(a-b).
\end{aligned}\right.$$

Si $p_1=1$, $p_2=2$, on trouve $N=21$, d'où $a=7$, $b=3$ et

$$\begin{array}{lll}
x_1=28, & x_2=49, & x_3=-68;\\
X_1=10, & X_2=11, & X_3=2.
\end{array}$$

Des formules (14) on déduit ensuite, en prenant les signes supérieurs :

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= (p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_2+1)+p_2^2,\\
x_3 &= -(p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+2p_2+2)(2p_1+2p_2+1)-p_1^2-p_2^2;\\
X_1 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+3p_1+2p_2+2,\\
X_2 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+2p_1+3p_2+2,\\
X_3 &= p_1^2+p_2^2+p_1p_2+p_1+p_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $p_1=2$, $p_2=-1$, on a

$$\begin{array}{lll}
x_1=39, & x_2=-6, & x_3=-26;\\
X_1=9, & X_2=6, & X_3=4.
\end{array}$$

Si l'on pose dans ces formules $p_1=-p_2=p$, on trouve ces solutions générales :

$$\begin{array}{ll}
x_1=2(p^3+p^2+2p+1), & X_1=p^2+p+2,\\
x_2=-2(p^3-p^2+2p-1), & X_2=p^2-p+2,\\
x_3=-(3p^2+2); & X_3=p^2.
\end{array}$$

Pour $p = 1$, on obtient la solution

$$\begin{array}{lll} x_1 = 10, & x_2 = -2, & x_3 = -5; \\ X_1 = 4, & X_2 = 2, & X_3 = 1; \end{array}$$

pour $p = 3$, on a

$$\begin{array}{lll} x_1 = 86, & x_2 = -46, & x_3 = -29; \\ X_1 = 14, & X_2 = 8, & X_3 = 9. \end{array}$$

En adoptant dans (14) les signes inférieurs on obtient encore ces solutions du système II_3 :

$$\begin{array}{ll} x_1 = & -(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_1 + 1) + p_1^2, \\ x_2 = & -(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_2 + 1) + p_2^2, \\ x_3 = & (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)(2p_1 + 2p_2 + 1) - p_1^2 - p_2^2; \\ X_1 = & p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - p_1, \\ X_2 = & p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - p_2, \\ X_3 = & p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 + p_1 + p_2. \end{array}$$

Par exemple, avec $p_1 = 3$, $p_2 = -2$, on a

$$\begin{array}{lll} x_1 = -40, & x_2 = 25, & x_3 = 8; \\ X_1 = 4, & X_2 = 9, & X_3 = 8. \end{array}$$

En faisant dans les dernières formules $p_1 = -p_2 = p$, on trouve ces solutions générales simples :

$$\begin{array}{lll} x_1 = -2p^3, & x_2 = 2p^3, & x_3 = -p^2; \\ X_1 = p(p-1), & X_2 = p(p+1), & X_3 = p^2. \end{array}$$

Ainsi, pour $p = 2$, on obtient

$$\begin{array}{lll} x_1 = -16, & x_2 = 16, & x_3 = -4; \\ X_1 = 2, & X_2 = 6, & X_3 = 4; \end{array}$$

pour $p = 3$,

$$\begin{array}{lll} x_1 = -54, & x_2 = 54, & x_3 = -9; \\ X_1 = 6, & X_2 = 12, & X_3 = 9. \end{array}$$

On peut aussi déduire de (18) de nombreuses solutions générales en choisissant pour p_1 et p_2 des foncd'un paramètre h telles que le nombre N correspondant soit toujours un produit de deux facteurs. Posons, par exemple, $p_1 = 3h - 1$, $p_2 = -3h - 1$; on a

$$N = 18h^2 + 3, \qquad a = 6h^2 + 1, \qquad b = 3,$$

d'où la solution générale

$$\begin{aligned} x_1 &= 6h^2(3h+1), & X_1 &= 3h(h+1), \\ x_2 &= -6h^2(3h-1), & X_2 &= 3h(h-1), \\ x_3 &= 1 - 9h^2; & X_3 &= 3h^2 - 1. \end{aligned}$$

8. *Système* II_4. — On considère donc le système

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_2+x_3+x_4) &= X_1^2, \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_1+x_3+x_4) &= X_2^2, \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_1+x_2+x_4) &= X_3^2, \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_1+x_2+x_3) &= X_4^2. \end{aligned}$$

On a dans ce cas

$$N = a.b = (2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3)^2 + 4(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

et les formules (13) s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[p_1+p_2+p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6)\right](2p_1+1) + p_1^2, \\ x_2 &= \left[p_1+p_2+p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6)\right](2p_2+1) + p_2^2, \\ x_3 &= \left[p_1+p_2+p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6)\right](2p_3+1) + p_3^2, \\ -x_4 &= 2\left[p_1+p_2+p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6)\right](p_1+p_2+p_3+1) + p_1^2+p_2^2+p_3^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 2p_1 + p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6), \\ X_2 &= p_1 + 2p_2 + p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6), \\ X_3 &= p_1 + p_2 + 2p_3 \pm \frac{1}{4}(a+b\pm 6), \\ X_4 &= \frac{1}{4}(a-b). \end{aligned}$$

Par exemple, avec $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$, on a

$$N = 161, \qquad a = 23, \qquad b = 7$$

et

$$\begin{array}{llll} x_1 = 100, & x_2 = 40, & x_3 = 13, & x_4 = -140; \\ X_1 = 16, & X_2 = 14, & X_3 = 13, & X_4 = 4; \end{array}$$

avec $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = -3$, on trouve

$$N = 65, \qquad a = 13, \qquad b = 5$$

et

$$\begin{array}{llll} x_1 = 34, & x_2 = 19, & x_3 = -21, & x_4 = -26; \\ X_1 = 8, & X_2 = 7, & X_3 = 3, & X_4 = 2. \end{array}$$

D'après les formules (16), on a ensuite ces solutions générales à trois paramètres :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_2+1)+p_2^2,\\
x_3 &= 2[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2](2p_3+1)+p_3^2,\\
-x_4 &= 4[p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+2(p_1+p_2+p_3)+2]\\
&\qquad \times(p_1+p_2+p_3+1)+p_1^2+p_2^2+p_3^2;\\
X_1 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+5p_1+4p_2+4p_3+4,\\
X_2 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+4p_1+5p_2+4p_3+4,\\
X_3 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+4p_1+4p_2+5p_3+4,\\
X_4 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+3(p_1+p_2+p_3)+2.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -2$, on trouve

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{llll} x_1 = 19, & x_2 = 6, & x_3 = -14, & x_4 = -5; \\ X_1 = 7, & X_2 = 6, & X_9 = 4, & X_4 = 5. \end{array}\right.$$

On déduit de même de (17) ces solutions :

$$\begin{aligned}
x_1 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_1+1)+p_1^2,\\
x_2 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_2+1)+p_2^2,\\
x_3 &= -[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_2+p_3)+1](2p_3+1)+p_3^2,\\
x_4 &= 2[2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1+p_1+p_1+p_3)+1]\\
&\qquad \times(p_1+p_2+p_3+1)-p_1^2-p_2^2-p_3^2;\\
X_1 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+p_1+2p_2+2p_3+1,\\
X_2 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+2p_1+p_2+2p_3+1,\\
X_3 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+2p_1+2p_2+p_3+1,\\
X_4 &= 2(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+3(p_1+p_2+p_3)+2.
\end{aligned}$$

Pour $p_1 = 2, p_2 = 1,\ p_3 = -1$, on a

$$x_1 = -71,\quad x_2 = -44,\quad x_3 = 16,\quad x_4 = 84;$$
$$X_1 = 13,\quad X_2 = 14,\quad X_3 = 16,\quad X_4 = 18.$$

Si $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, et si l'on désigne $\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ par π, on trouve, comme cas particuliers des formules que nous venons d'obtenir, ces solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(\pi + 2)(2p_1 + 1) + p_1^2, & X_1 &= 2(\pi + 2) + p_1, \\ x_2 &= 2(\pi + 2)(2p_2 + 1) + p_2^2, & X_2 &= 2(\pi + 2) + p_2, \\ x_3 &= 2(\pi + 2)(2p_3 + 1) + p_3^2, & X_3 &= 2(\pi + 2) + p_3, \\ x_4 &= -2(3\pi + 4); & X_4 &= 2(\pi + 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2\pi + 1)(2p_1 + 1) + p_1^2, & X_1 &= 2\pi + p_1 + 1, \\ x_2 &= -(2\pi + 1)(2p_2 + 1) + p_2^2, & X_2 &= 2\pi + p_2 + 1, \\ x_3 &= -(2\pi + 1)(2p_3 + 1) + p_3^2, & X_3 &= 2\pi + p_3 + 1, \\ x_4 &= 2(\pi + 1); & X_4 &= 2(\pi + 1). \end{aligned}$$

Signalons encore les formules suivantes, qu'on déduit aisément des premières formules générales à trois paramètres qui précèdent et qui donnent des *solutions du système* II_4 *pour lesquelles les inconnues* X_1, X_2, X_3, X_4 *sont en progression arithmétique :*

$$\begin{aligned} x_1 &= 6(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + (3h + 1)^2, \\ x_2 &= 2(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + h^2, \\ x_3 &= -2(10h^2 + 10h + 3)(2h + 1) + (h + 1)^2, \\ x_4 &= -4(10h^2 + 10h + 3)(3h + 1) - 11h^2 - 8h - 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 20h^2 + 23h + 7, \\ X_2 &= 20h^2 + 21h + 6, \\ X_3 &= 20h^2 + 19h + 5, \\ X_4 &= 20h^2 + 17h + 4. \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on a

$$x_1 = 19,\quad x_2 = 6,\quad x_3 = -5,\quad x_4 = -14;$$
$$X_1 = 7,\quad X_2 = 6,\quad X_3 = 5,\quad X_4 = 4;$$

c'est la solution (19). Pour $h=1$, on obtient

$$\begin{array}{llll} x_1 = 430, & x_2 = 139, & x_3 = -134, & x_4 = -389; \\ X_1 = 50, & X_2 = 47, & X_3 = 44, & X_4 = 41. \end{array}$$

9. *Système* II_5. — Pour le cas de cinq équations, ce sont surtout les formules (15) prises avec les signes inférieurs qui donnent lieu à des solutions générales d'une forme assez simple. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_1+1) + p_1^2, \\ x_2 &= -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_2+1) + p_2^2, \\ x_3 &= -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_3+1) + p_3^2, \\ x_4 &= -\frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2p_4+1) + p_4^2, \\ x_5 &= \frac{1}{4}[(\Sigma p)^2 + \Sigma p^2](2\Sigma p+3) - \Sigma p^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_1, \\ X_2 &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_2, \\ X_3 &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_3, \\ X_4 &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_4, \\ X_5 &= \frac{1}{4}(\Sigma p)^2 + \frac{1}{4}\Sigma p^2 - \Sigma p. \end{aligned}$$

Rappelons que, pour ce cas, le nombre de nombres p impairs doit être 0, 3 ou 4. Ainsi, avec $p_1=3$, $p_2=1$, $p_3=0$, $p_4=-1$, on a

$$\begin{array}{lllll} x_1 = -26, & x_2 = -14, & x_3 = -5, & x_4 = 6, & x_5 = 34; \\ X_1 = 2, & X_2 = 4, & X_3 = 5, & X_4 = 6, & X_5 = 8. \end{array}$$

Si l'on suppose encore $\Sigma p = 0$, on trouve ces solutions simples :

$$x_1 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_1+1)+p_1^2, \qquad X_1 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_2+1)+p_2^2, \qquad X_2 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_2,$$

$$x_3 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_3+1)+p_3^2, \qquad X_3 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_3,$$

$$x_4 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2(2p_4+1)+p_4^2, \qquad X_4 = \frac{1}{4}\Sigma p^2 - p_4,$$

$$x_5 = -\frac{1}{4}\Sigma p^2; \qquad X_5 = \frac{1}{4}\Sigma p^2.$$

Si $p_1 = 2$, $p_2 = -2$, $p_3 = 4$, $p_4 = -4$, on a, d'après ces formules :

$$x_1 = -46, \quad x_2 = 34, \quad x_3 = -74, \quad x_4 = 86, \quad x_5 = -10,$$
$$X_1 = 8, \quad X_2 = 12, \quad X_3 = 6, \quad X_4 = 14, \quad X_5 = 10.$$