NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 39-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__39_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1655 et **1656** (numéros rectifiés).

1655.

(1893, p. 52*.)

Démontrer que la somme des carrés des coefficients binomiels d'un nombre entier positif a

$$\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2$$

n'est JAMAIS *divisible par un nombre premier* $p > 2a$, *mais toujours divisible par* TOUS *les nombres premiers compris entre*

$$\frac{2a}{2n+2} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+1},$$

où n *est un nombre entier positif et* $< a$; *et que la même somme n'est pas divisible par un même nombre premier* p

compris entre

$$\frac{2a}{2n+3} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{2n+2},$$

excepté si une puissance de p (supérieure à l'unité) se trouve dans l'intervalle de a jusqu'à 2a.

C. SZILY.

1656.

(1893, p. 52*.)

Démontrer les identités suivantes :

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \sum_{k=0}^{k=m} 2^{a-2k} \binom{a}{k} \binom{a-k}{k},$$

où

$$m = \varepsilon\left(\frac{a}{2}\right);$$

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = 2 \sum_{k=0}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a-1}{k}$$

$$= \frac{2(2a-1)}{a-1} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a-1}{k} \binom{a-1}{k-1};$$

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = \frac{a+1}{a} \sum_{k=1}^{k=a-1} \binom{a}{k} \binom{a}{k-1};$$

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 = (-1)^a \sum_{k=0}^{k=2a} (-1)^k \binom{2a}{k}^2;$$

$$(5) \qquad \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k}^2 \sum_{k=0}^{k=b} \binom{b}{k}^2}{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b} \binom{a}{k} \binom{b}{k}} = \sum_{k=-b}^{k=b} (-1)^k \binom{2a}{a-k} \binom{2b}{b-k},$$

où b est un nombre entier positif < a

C. SZILY.

Solutions sommaires

Par M. H. Brocard.

Le retard de la réponse provient sans doute de la méconnaissance de l'expression algébrique du nombre à étudier, ou du moyen de l'obtenir, et peut-être aussi de la notation adoptée, qui n'aura pas été saisie de quelques lecteurs.

Par un procédé empirique, on reconnaît aisément que ΣC^2 est un des nombres de la médiane du triangle arithmétique de Pascal. Ceci autorise à conclure, par analogie, que ΣC^2 pour le degré n est le milieu des nombres C répondant au degré $2n$.

La méthode élégante et ingénieuse que voici, due à Laplace, est fondée sur l'observation que ΣC^2 est la partie indépendante de u du développement de $(1+u)^a\left(1+\frac{1}{u}\right)^a$ ou de $\frac{(1+u)^{2a}}{u^a}$; mais ce terme étant celui du milieu, il en résulte que ΣC^2 est le terme moyen T_m du binome $(1+1)^{2a}$.

La formule T peut s'écrire

$$T = \frac{1.2.3\ldots 2a}{(1.2.3\ldots a)^2},$$

comme cela a été indiqué ici, d'après Lagrange, dans une question (n° **389**), proposée en 1857 et résolue, même année, pages 296, 369 et 375.

Avec la notation de l'énoncé **1655**, on a

$$T = \sum_{k=0}^{k=a}\binom{a}{k}^2 = \Sigma C^2(1+1)^2 = \frac{(2a)!}{(a!)^2},$$

$$T = T_m(1+1)^{2a} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots 2a}{1.2.3\ldots a}.$$

Toutes les propriétés arithmétiques du nombre T découleront de sa composition en fonction de a. C'est ainsi, par exemple, que les diviseurs de T, qui est toujours entier parce qu'il est un nombre combinatoire, ne peuvent être que des diviseurs du produit $(a+1)\ldots 2a$; donc il n'y en a pas au-dessus de $2a$.

Quant aux autres propositions énoncées, je signalerai leur relation avec la question **295** de Cesàro (*Mathesis*, 1883, p. 248) précisément au sujet des facteurs premiers de la même formule T. (Voir *Mathesis*, 1886, p. 179-180.)

Pour la bibliographie de T. *voir* aussi : *N. A.*, 1875, p. 527 (C. Moreau); *Mathesis*, 1892, p. 272 (J. Neuberg); *J. de Math. sp.*, 1893, p. 7-9 (G. de Longchamps).

Note. — En se servant de notations plus familières à nos lecteurs pour représenter les nombres combinatoires, il se pourra qu'on parvienne aisément à établir les autres propriétés du nombre T énoncées dans la question **1656**.

1678.

(1894, p. 4*.)

Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle donné.

A. Cazamian.

Solution

Par un abonné.

Les paraboles conjuguées par rapport à un triangle sont inscrites dans le triangle obtenu en joignant les milieux des côtés du premier. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que le premier triangle est le triangle diagonal du quadrilatère, formé par les trois côtés du second et la droite de l'infini. On sait alors que le foyer F d'une parabole répondant à la question est sur le cercle circonscrit au second triangle et que la tangente au sommet est la droite de Simpson de F. Le problème revient donc à chercher le lieu du point de rencontre d'une droite de Simpson avec la perpendiculaire abaissée du point correspondant, ainsi que l'enveloppe de cette perpendiculaire. Or, ce problème a fait l'objet de la question **1505** (1884, p. 447), déjà résolue dans les *Nouvelles Annales*.

Note de la Rédaction. — Dans une autre réponse, M. H. Brocard démontre l'identité de la question **1678** avec la question **1545**, récemment résolue par M. d'Ocagne (1915, p. 469-471).

Cette réponse surtout bibliographique, et datant d'août 1915, sera publiée prochainement.

1841.

(1900, p. 190.)

Dans un quadrilatère complet, les quatre orthocentres et les points où la ligne de ces orthocentres est coupée par les quatre côtés sont huit points en involution.

C. Blanc.

Solution

Par un abonné.

Il existe une parabole et une seule tangente aux quatre côtés du quadrilatère et sa directrice est la ligne des orthocentres. Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

son équation.

Les quatre côtés auront des équations de la forme

$$y = m_i x + \frac{p}{2m_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

m_i désignant le coefficient angulaire d'une tangente à la parabole. L'orthocentre du triangle formé par les trois premières tangentes ($i = 1, 2, 3$) a pour ordonnée

$$y_4 = \frac{p}{2m_1 m_2 m_3}(1 + m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2).$$

D'autre part, la directrice de la parabole, ou ligne des orthocentres, rencontre le quatrième côté en un point qui a pour ordonnée

$$\gamma_4 = \frac{p}{2m_4}(1 - m_4^2).$$

Il faut prouver que les points y_4 et γ_4, et les points analogues, forment une involution. Pour cela, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer deux constantes α et β telles qu'on ait

$$y_i\gamma_i + \alpha(y_i + \gamma_i) + \beta = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Or, si l'on forme les quantités $y_4\gamma_4$ et $y_4 + \gamma_4$, on trouve

$$\begin{aligned} y_4\gamma_4 = \frac{p^2}{4m_1 m_2 m_3 m_4}(1 - m_4^2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2 \\ - m_4 \Sigma m_1 m_2 m_4 + m_1 m_2 m_3 m_4), \\ y_4 + \gamma_4 = \frac{p}{2m_1 m_2 m_3 m_4}[m_4(1 - m_1 m_2 m_3 m_4) + \Sigma m_1 m_2 m_3]. \end{aligned}$$

Si l'on prend les trois premières valeurs de ces quantités, correspondant à $i = 1, 2, 3$, pour que les constantes α et β existent, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1\gamma_1 & y_1+\gamma_1 & 1 \\ y_2\gamma_2 & y_2+\gamma_2 & 1 \\ y_3\gamma_3 & y_3+\gamma_3 & 1 \end{vmatrix}$$

soit nul. Or, si l'on remplace $y_i\gamma_i$, $y_i+\gamma_i$ par leurs valeurs et si l'on effectue les calculs, on trouve bien zéro pour résultat. Si l'on remplace $y_3\gamma_3$, $y_3+\gamma_3$ respectivement par $y_4\gamma_4$, $y_4+\gamma_4$, et si l'on effectue le même calcul, le résultat est le même. Les constantes α et β existent bien et le théorème est démontré.

1878.

(1900, p. 571.)

On considère une ellipse E *et le cercle* C *concentrique à l'ellipse ayant pour diamètre la somme des axes de* E. *D'un point* M *quelconque de* C *on mène les tangentes à* E *dont les points de contact sont* P *et* Q. *Soit* (Π) *la parabole tangente en* P *et* Q *aux droites* MP *et* MQ.

1° *Le lieu des foyers des paraboles* (Π) *est l'ellipse* E;

2° *Les paraboles* (Π) *sont tangentes à la développée de l'ellipse* E;

3° *La directrice des paraboles* (Π) *enveloppe un cercle;*

4° *L'axe des paraboles* (Π) *enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.* E. Barisien.

Solution

Par un abonné.

Soient α et β les coordonnées du point M. On a

$$(1) \qquad \alpha^2+\beta^2=(a+b)^2.$$

L'équation du point M est

$$(2) \qquad \alpha u+\beta v-1=0;$$

et celle de la parabole (Π) en coordonnées tangentielles

$$(3) \qquad a^2u^2+b^2v^2-1+(\alpha u+\beta v-1)^2=0.$$

On obtient les coordonnées (x_0, y_0) du foyer de la parabole (Π) en exprimant que la droite

$$y - y_0 = i(x - x_0)$$

est tangente à (3). On trouve ainsi

$$x_0 = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad y_0 = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

On en déduit, en tenant compte de (1),

$$\alpha = (a + b)\frac{x_0}{a}, \qquad \beta = (a + b)\frac{y_0}{b};$$

d'où

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0;$$

ce qui démontre la première partie.

En écrivant que la directrice est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à (Π), on trouve pour son équation

$$\alpha x + \beta y - \frac{a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2}{2} = 0.$$

En tenant compte de (1), on voit qu'elle enveloppe le cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b}.$$

L'axe de (Π) passe par le foyer et est perpendiculaire à la directrice, son équation est donc

$$y - \frac{b\beta}{a + b} - \frac{\beta}{\alpha}\left(x - \frac{a\alpha}{a + b}\right) = 0;$$

ou bien

$$\frac{a + b}{a - b}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) - 1 = 0.$$

Les coordonnées tangentielles de cette droite sont donc

$$u = \frac{a + b}{\alpha(a - b)}, \qquad v = -\frac{(a + b)}{\beta(a - b)};$$

et, en vertu de (1), elle enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=(a-b)^2.$$

Il reste enfin à trouver l'enveloppe des paraboles (Π). Nous avons fait le calcul de plusieurs façons et nous n'avons jamais trouvé la développée de l'ellipse. Peut-être y a-t-il une erreur dans l'énoncé; ce qui expliquerait que la question **1878**, qui ne présente pas de difficultés particulières, n'ait pas encore été résolue.

Voici comment on peut diriger le calcul pour l'abréger et le simplifier un peu. Au lieu de la parabole (Π), considérons sa polaire réciproque par rapport à (E). Son enveloppe sera la polaire réciproque de l'enveloppe de (Π) et, si cette dernière est la développée de (E), ce sera la kreuzcurve d'équation

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}-c^4=0.$$

Cette équation étant beaucoup plus simple que celle de la développée de l'ellipse, on comprend l'avantage qu'il y a à procéder comme nous le faisons.

L'équation de la polaire réciproque de (Π) par rapport à (E) est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

Mais la relation (1) permet de poser

$$\alpha=(a+b)\cos\varphi,\qquad \beta=(a+b)\sin\varphi;$$

et l'équation précédente devient

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+(a+b)^2\left(\frac{x\cos\varphi}{a^2}+\frac{y\sin\varphi}{b^2}-\frac{1}{a+b}\right)^2=0.$$

En la différentiant par rapport à φ, on trouve

$$\left(\frac{x\cos\varphi}{a^2}+\frac{y\sin\varphi}{b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\left(-\frac{x\sin\varphi}{a^2}+\frac{y\cos\varphi}{b^2}\right)=0.$$

Le premier facteur donne comme enveloppe l'ellipse (E), résultat évident *a priori;* le second donne la vraie enveloppe, qui se trouve ainsi définie par l'équation

$$\frac{x \sin\varphi}{a^2} - \frac{y \cos\varphi}{b^2} = 0$$

et l'équation (4).

De ces équations on déduit

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2a^2(a+b)\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + (a+b)^2}, \\[2ex] y = \dfrac{2b^2(a+b)\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + (a+b)^2}; \end{cases}$$

et ces valeurs ne satisfont pas à l'équation de la kreuzcurve. Les coordonnées d'un point de l'enveloppe, en fonction du paramètre φ, sont données par les relations (5). Pour obtenir l'équation de cette enveloppe, il faut éliminer φ entre elles; mais on n'arrive pas à une équation plus simple ni plus facile à discuter que les relations elles-mêmes.