Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 391-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__391_1>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Questions de Cesàro.

1402 (**1882**, 240). — La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$n^p\left(1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\ldots\right).$$

1403 (**1882**, 240). — $a, b, c, \ldots$ étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a+p}+\frac{p}{b+p}+\frac{p}{c+p}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}.$$

1433 (**1883**, 144) (¹). — 1° Il n'y a que dix-huit espèces de

(¹) Cette question ne figurait pas dans les listes des questions non résolues publiées récemment. Mais comme nous n'avons pu, malgré nos recherches, retrouver aucune trace d'une solution publiée, il nous a semblé opportun d'en reproduire ici l'énoncé.

polyèdres aux sommets desquels les faces de même ordre concourent en même nombre.

2° Il n'y a que dix-huit espèces de polyèdres, dont chaque face contient les sommets de même ordre en même nombre.

3° Ces polyèdres sont les seuls susceptibles de devenir réguliers ou semi-réguliers.

1438 (**1883**, 239). — La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à $l2$.

1439 (**1883**, 239). — Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à ln.

1440 (**1883**, 239). — La somme des inverses des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \dots$$

1441 (**1883**, 239). — Soient $a, b, c, \dots$ les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a} + \frac{b}{p^b} + \frac{c}{p^c} + \dots$$

est égale, en moyenne, à $\dfrac{1}{p-1}$.

1442 (**1883**, 239). — $f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim \frac{f(n)}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

1443 (**1883**, 240). — La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à αn^p. La constante α est comprise entre $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{p} + 1$. Déterminer sa valeur.

1444 (**1883**, 240). — On a

$$f(1)-f(3)+f(5)-\ldots\pm f(2n-1)$$
$$=\pm\frac{1}{2}f(\varepsilon+2n)+\text{const.},$$
$$f(2)-f(4)+f(6)-\ldots\pm f(2n)$$
$$=\pm\frac{1}{2}f(\varepsilon+2n+1)+\text{const.},$$

pourvu qu'on remplace les puissances de ε par les nombres d'Euler correspondants, définis par la relation symbolique

$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0 \qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

1445 (**1883**, 240). — 1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels est divisible par tous les nombres premiers compris entre $m+1$ et $n+2$. et supérieurs à $n-m$;

2° La même somme, diminuée de $1.2.3\ldots, m$, est divisible par $n-m$, si ce nombre est premier.

1446 (**1883**, 240). — Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations

$$(B+1)^p-B^p=0,$$
$$(\varepsilon+1)^p+(\varepsilon-1)^p=0,$$

satisfont aux relations symboliques

$$(2B+1)^p=(2-2^p)B_p,$$
$$(4B+1)^p=(2-2^p)B_p-p\varepsilon_{p-1},$$
$$(4B+3)^p=(2-2^p)B_p+p\varepsilon_{p-1}.$$

1447 (**1883**, 287). — Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ des valeurs positives de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ satisfaisant à l'équation de coefficients positifs

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+\ldots+A_nx_n=1.$$

La probabilité que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ soient respectivement supérieurs à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est exprimée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de

$$1-(A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_3+\ldots+A_n\alpha_n).$$

1486 (**1884**, 160). — La probabilité que la conique déterminée par cinq points, pris au hasard dans un plan, soit une ellipse, est infiniment petite.

1511 (**1884**, 496). — On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Demontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.

1522 (**1885**, 56). — Le déterminant de $(n-1)^2$ éléments, dont l'élément général u_{ij} est égal *au nombre des diviseurs communs de* $i+1$, $j+1$, représente la *totalité des entiers, non supérieurs à* n, *dépourvus de diviseurs carrés, autres que l'unité.*

1523 (**1885**, 104). — Soit $[f(x)]_{x_1}^{x_2}$ l'expression de l'aire comprise entre un arc de courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes. A l'arc de courbe on inscrit une ligne polygonale, dont tous les côtés ont, sur l'axe des abscisses, des projections égales à ε. L'expression de l'aire comprise entre cette ligne, l'axe des abscisses et les ordonnées extrêmes est

$$\frac{1}{2}\left[f(x+\mathrm{B}\varepsilon)+f(x-\mathrm{B}\varepsilon)\right]_{x_1}^{x_2},$$

pourvu qu'on remplace les puissances de B par les nombres de Bernoulli correspondants.

1629 (**1892**, 14*). — Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A, à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B, à la ligne (B). Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe.

1631 (**1892**, 14*). — Chercher les courbes telles que les plans polaires de leurs points, par rapport à une sphère donnée, passent par les centres des sphères osculatrices correspondantes.

Note de la Rédaction. — Beaucoup des énoncés qui précèdent semblent se rattacher aux travaux publiés par l'auteur dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége* sous le titre « Sur diverses questions d'arithmétique ». Son livre « Excursions arithmétiques à l'infini » traite aussi de sujets analogues. Il est profondément à regretter que l'auteur n'ait pas accompagné l'envoi de ses questions de solutions, au moins indiquées. Il faut souhaiter que cette leçon du passé soit profitable à l'avenir, et qu'on ne laisse pas transformer en rébus indéchiffrables des questions qui auraient pu constituer d'utiles problèmes instructifs.