Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 385-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__385_1>

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — *Au sujet du problème de Pappus généralisé*. — Maintenant que M. Joffroy a démontré (*N. A.*, 1916, p. 168) que le problème de Pappus généralisé est résoluble au moyen d'équations du second degré, il est facile de fournir une explication de ce fait. Pour sa solution, M. Joffroy emploie les deux équations

$$x^2+y^2-2xy\cos\omega-l^2=0,$$
$$xy-a(x+y)=0.$$

La première représente une conique ayant pour axes les bissectrices de l'angle xOy; la seconde une hyperbole ayant pour centre le point P, pour asymptotes les parallèles à Ox et Oy menées par P, pour sommet le point O. Les deux coniques ont donc OP pour axe de symétrie commun et l'on est par suite assuré que la détermination de leurs points d'intersection dépend d'équations du second degré.

Et en effet, si l'on substitue à x et y les valeurs

$$x=\frac{X\sin\frac{\omega}{2}+Y\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\omega},\qquad y=\frac{X\sin\frac{\omega}{2}-Y\cos\frac{\omega}{2}}{\sin\omega},$$

ce qui revient à prendre pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices de l'angle xOy, les équations précédentes deviennent

$$X^2\sin^2\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)+Y^2\cos^2\frac{\omega}{2}(1+\cos\omega)-\frac{l^2\sin^2\omega}{2}=0,$$
$$X^2\sin^2\frac{\omega}{2}-Y^2\cos^2\frac{\omega}{2}-2a\sin\omega\sin\frac{\omega}{2}X=0;$$

d'où, par élimination de Y^2,

$$X^2-2a\cos\frac{\omega}{2}(1+\cos\omega)X-l^2\cos^2\frac{\omega}{2}=0,$$

équation d'où l'on déduirait des résultats analogues à ceux donnés par M. Joffroy dans son article.

Un abonné. — *Au sujet de la surface de Weddle.*

— Au sujet de la surface de Weddle, on peut rappeler que Chasles a traité un problème plus général que la recherche de la surface lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés.

Il a examiné le cas (*Comptes rendus*, t. LII, 1861, p. 1157-1162) où les cônes divisent harmoniquement six ou sept segments donnés. Dans le premier cas, le lieu des sommets est une surface du quatrième ordre; dans le second, une courbe gauche du sixième ordre.

Il fait dériver ces propositions du théorème général suivant sur les figures homographiques :

Si l'on a quatre figures homographiques dans l'espace, le lieu d'un point par où passent quatre plans homologues des quatre figures est une surface du quatrième ordre.

F. Balitrand. — *Une propriété des courbes de Ribaucour.* — Les courbes de Ribaucour sont caractérisées, au point de vue géométrique, par la propriété suivante : *Le rayon de courbure en un point quelconque est partagé dans un rapport constant par l'axe des x.*

Analytiquement, cette propriété se traduit par l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{n}{y}(1+p^2) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx},\ n = \text{const.}\right),$$

ou bien

$$\frac{p\,dp}{dy} = \frac{n}{y}(1+p^2), \qquad \frac{p\,dp}{1+p^2} = n\frac{dy}{y};$$

d'où

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}.$$

On déduit de là

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} = 1 + p^2,$$

et comme en vertu de (1) on a, ρ désignant le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{y\sqrt{1+p^2}}{n},$$

on obtient finalement

$$\rho = \frac{y^{n+1}}{n\,c^n}. \tag{2}$$

Ainsi : *Le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe de Ribaucour est proportionnel à une puissance de l'ordonnée de ce point.*

Cette propriété peut remplacer, parfois avec avantage, la définition habituelle des lignes de Ribaucour; car elle les caractérise, de même que la suivante qui est une conséquence immédiate de ce qui précède.

La normale (partie comprise entre le point d'incidence et l'axe des x) *en un point quelconque d'une ligne de Ribaucour est proportionnelle à une puissance de l'ordonnée de ce point.*

Parmi les courbes célèbres qui font partie de la classe des lignes de Ribaucour, figurent notamment la cycloïde, la chaînette et la parabole pour lesquelles on a respectivement

$$n = -\frac{1}{2}, \qquad \rho^2 = \frac{cy}{4} \qquad \text{(cycloïde)};$$

$$n = 1, \qquad \rho = \frac{y^2}{c} \qquad \text{(chaînette)};$$

$$n = \frac{1}{2}, \qquad \rho^2 = \frac{y^3}{4c^2} \qquad \text{(parabole)}.$$

Différentions l'équation (2), nous obtenons

$$d\rho = \frac{n+1}{n}\,\frac{y^n}{c^n}\,dy.$$

Mais, si s_1 est l'arc de la développée, on a $d\rho = ds_1$ et si y_1 est l'ordonnée du centre de courbure, on trouve facilement que

$$\frac{y}{y_1} = \frac{n}{1-n}.$$

Par suite,

$$ds_1 = \frac{(n+1)n^n}{(1-n)^{n+1}} \frac{y_1^n}{c^n} dy_1;$$

d'où

$$s_1 = \frac{n^n}{(1-n)^{n+1}} \frac{y^{n+1}}{c^n}.$$

Les développées des lignes de Ribaucour sont donc caractérisées par cette propriété que *l'arc est proportionnel à une puissance de l'ordonnée*. (*Voir* E. Cesàro, *Nouv. Ann.*, 1914, p. 102.)

E.-N. Barisien. — *Sur le problème de Pappus.* — La remarquable solution de ce problème (**1916**, p. 168-171) m'a suggéré l'idée d'étudier ce problème *lorsque l'angle* XOY *est droit et que le point* P *est en dehors de la bissectrice*. En conservant les notations de M. J. Joffroy (*loc. cit.*), et posant

$$PA = b, \qquad PA' = a, \qquad OS = x, \qquad OS' = y,$$

on a à résoudre les deux équations

$$x^2 + y^2 = l^2, \tag{1}$$

$$xy = bx + ay. \tag{2}$$

Algébriquement, l'élimination de y entre ces deux équations donnera une équation du quatrième degré en x, qui ne se décomposera en deux équations du second degré que si $a = b$.

Géométriquement, si T est le quatrième sommet du rectangle OSTS', on déterminera les quatre points tels que T, par l'intersection du cercle (1) avec l'hyperbole équilatère (2), facile à construire. Son centre est en P, ses asymptotes sont les droites PA et PA′, et l'hyperbole passe par O. Avec ces données, on peut construire cette hyperbole par points avec toute la précision possible. On projettera sur OX et OY les quatre points d'intersection de (1) et (2) et l'on aura les quatre droites SS′ de longueur l. Comme vérification graphique, ces quatre droites doivent passer par P.

Si les droites OX et OY font entre elles l'angle ω, on aura à résoudre les deux équations

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega = l^2, \tag{3}$$

$$xy = bx + ay, \tag{4}$$

ou à construire l'intersection de l'ellipse (3) avec l'hyperbole équilatère (4).

E.-N. Barisien. — *Sur des décompositions de certains nombres en sommes de carrés.* — On sait, par les identités de Lagrange, décomposer tout nombre N de la forme

$$N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(a^2c^2 + b^2d^2)$$

en somme de deux carrés (de douze façons) et en somme de quatre carrés (de six façons), ainsi qu'en une somme de huit carrés.

1° Voici deux décompositions de N en somme de trois carrés

$$N = [ab(c^2 \mp d^2)]^2 + [cd(a^2 \pm b^2)]^2 + (a^2c^2 + b^2d^2)^2. \tag{1}$$

2° On a de même pour le nombre N′

$$N' = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(a^2d^2 + b^2c^2),$$

$$N' = [ab(c^2 \mp d^2)]^2 + [cd(a^2 \pm b^2)]^2 + (a^2d^2 + b^2c^2)^2. \tag{2}$$

3° Il résulte de là en faisant le produit des formules (1) et (2) que si $N'' = NN'$, *tout nombre* N'' *de la forme*

$$N'' = (a^2 + b^2)^2 (c^2 + d^2)^2 (a^2 c^2 + b^2 d^2)(a^2 d^2 + b^2 c^2)$$

est de quatre façons différentes une somme de neuf carrés.

Dans deux de ces décompositions, deux des neuf carrés sont des bicarrés.

Je signale cette curieuse décomposition du nombre N'' qui est peut-être inédite. En tout cas, sa démonstration directe semble devoir être assez ardue si l'on ne connaît pas les formules (1) et (2).