MATHIEU WEILL

Sur des identités remarquables

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 369-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__369_0>

[A1b]

SUR DES IDENTITÉS REMARQUABLES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit

$$ab = \lambda, \qquad a + b = \mu,$$

d'où

$$a^2 = \mu a - \lambda,$$
$$b^2 = \mu b - \lambda.$$

Considérons

$$\begin{aligned} P &= (x + ay + bz)(x + by + az) \\ &= x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (x + ay + bz)(x' + ay' + bz') \\ &= xx' + a^2 yy' + b^2 zz' + a(xy' + yx') + b(zx' + xz') \\ &\quad + \lambda(yz' + zy') \end{aligned}$$

ou

$$Q = X + aY + bZ,$$

en posant

$$\begin{aligned} X &= xx' - \lambda yy' - \lambda zz' + \lambda(yz' + zy'), \\ Y &= \mu yy' + xy' + yx', \\ Z &= \mu zz' + zx' + xz'. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} R = {} & (x + ay + bz)(x + by + az) \\ & \times (x' + ay' + bz')(x' + by' + az'). \end{aligned}$$

On aura, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} R &= (X + aY + bZ)(X + bY + aZ) \\ &= X^2 + \lambda Y^2 + \lambda Z^2 + \mu XY + \mu XZ + (\mu^2 - 2\lambda)YZ. \end{aligned}$$

R n'est autre que le produit des deux formes :

$$x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz,$$
$$x'^2 + \lambda y'^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (\mu^2 - 2\lambda)y'z'.$$

Donc nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux formes*

$$x^2+\lambda y^2+\lambda z^2+\ldots+(\mu^2-2\lambda)yz,$$
$$x'^2+\lambda y'^2+\ldots\ldots\ldots+(\mu^2-2\lambda)y'z$$

est une forme de même espèce, et cela de plusieurs manières, car on peut permuter y avec z, ce qui change X, Y, Z; *ou y' avec z'.*

En donnant à λ et a μ des valeurs particulières, on obtient un grand nombre d'identités.

Faisons, par exemple, $\lambda=1$, $\mu=-1$; il vient

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x'^2+y'^2+z'^2-x'y'-x'z'-y'z')$$
$$=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ,$$

avec

$$X=xx'-yy'-zz'+yz'+zy',$$
$$Y=-yy'+xy'+yx',$$
$$Z=-zz'+zx'+xz'.$$

En permutant x avec y ou avec z, ou x' avec y', .. , on obtient diverses valeurs pour le système X, Y, Z :

En particulier, si l'on fait

$$x=x',$$
$$y=y,$$
$$z=z',$$

il vient

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$$
$$=X^2+Y^2+Z^2-XY-XZ-YZ,$$

avec

$$X=x^2-(y-z)^2,$$
$$Y=2xy-y^2,$$
$$Z=2xz-z^2.$$

On aura aussi, évidemment,

$$\begin{aligned}
X_1 &= y^2 - (x - z)^2, \\
Y_1 &= 2yx - x^2, \\
Z_1 &= 2yz - z^2, \\
X_2 &= z^2 - (x - y)^2, \\
Y_2 &= 2zx - x^2, \\
Z_2 &= 2zy - y^2,
\end{aligned}$$

ce qui donne trois formes distinctes.

Dans le cas particulier des deux formes

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz, \\
x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'y' - x'z' - y'z',
\end{gathered}$$

on peut obtenir des résultats différents en partant de l'identité

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\
&\quad = (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z),
\end{aligned}$$

α et α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

On a

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x' + \alpha y' + \alpha^2 z') = X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

avec

$$\begin{aligned}
X &= xx' + yz' + zy', \\
Y &= zz' + xy' + yx', \\
Z &= yy' + xz' + zx'.
\end{aligned}$$

Le produit

$$\begin{aligned}
P = &(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) \\
&\times (x' + \alpha y' + \alpha^2 z')(x' + \alpha^2 y' + \alpha z')
\end{aligned}$$

s'écrira donc

$$\begin{aligned}
&(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \alpha^2 Y + \alpha Z) \\
&\quad = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ.
\end{aligned}$$

C'est une nouvelle forme du produit

$$(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x'^2+y'^2+z'^2-x'y'-x'z'-y'z').$$

En particulier, si l'on prend

$$x=x',\qquad y=y',\qquad z=z',$$

on aura

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2\\&\quad=(x^2+2yz)^2+(y^2+2xz)^2+(z^2+2xy)^2\\&\qquad-(x^2+2yz)(y^2+2xz)-\ldots.\end{aligned}$$

Reprenant la formule générale, faisons

$$\mu=1,\qquad z=0,\qquad z'=0;$$

il vient

$$(x^2+\lambda y^2+xy)(x'^2+\lambda y'^2+x'y')=X^2+\lambda Y^2+XY,$$

avec

$$\begin{aligned}X&=xx'-\lambda yy',\\Y&=yy'+xy'+yx',\end{aligned}$$

et, en faisant $\lambda=1$,

$$(x^2+y^2+xy)(x'^2+y'^2+x'y')=X^2+Y^2+XY,$$

avec

$$\begin{aligned}X&=xx'-yy',\\Y&=yy'+xy'+yx'.\end{aligned}$$

Permutant x avec y, on aura un nouveau système

$$\begin{aligned}X_1&=yx'-xy',\\Y_1&=xy'+yy'+xx',\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que l'identité générale que nous avons établie conduit à un très grand nombre d'identités nouvelles, qui peuvent avoir leur intérêt en Algèbre et dans la Théorie des nombres.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} K &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha), \end{aligned}$$

et l'expression

$$\begin{aligned} L &= a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c' \\ &= (a' + b' + c')(a' + b'\alpha + c'\alpha^2)(a' + b'\alpha^2 + c'\alpha). \end{aligned}$$

Le produit KL s'écrira

$$(A + B + C)(A + B\alpha + C\alpha^2)(A + B\alpha^2 + C\alpha)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= aa' + bb' + cc', \\ B &= ab' + bc' + ca', \\ C &= ac' + ba' + cb'. \end{aligned}$$

Pour le voir, il suffit de faire, séparément, les produits de

$$a + b + c \quad \text{par} \quad a' + b' + c',$$

de

$$a + b\alpha + c\alpha^2 \quad \text{par} \quad a' + b'\alpha^2 + c'\alpha,$$

et de

$$a + b\alpha^2 + c\alpha \quad \text{par} \quad a' + b'\alpha + c'\alpha^2.$$

On voit donc que le produit des deux formes

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \\ &a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c', \end{aligned}$$

est une forme de même espèce. On arrive d'ailleurs à ce résultat, immédiatement, en faisant le produit des déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & a' \\ c' & a' & b' \end{vmatrix} = 3a'b'c' - a'^3 - b'^3 - c'^3.$$

Leur produit est le déterminant

$$-\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

A, B, C ayant les valeurs indiquées plus haut.

Décomposons la forme

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

et faisons le produit

$$(a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2),$$

puis

$$(a + b + c)(a + b\alpha^2 + c\alpha),$$

puis

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha).$$

Le premier produit est égal à

$$a^2 - bc + \alpha(b^2 - ac) + \alpha^2(c^2 - ab)\ ;$$

le second est égal à

$$a^2 - bc + \alpha^2(b^2 - ac) + \alpha(c^2 - ab)\ ;$$

le troisième est égal à

$$a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab.$$

On a donc l'identité

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

avec

$$A = a^2 - bc,$$
$$B = b^2 - ac,$$
$$C = c^2 - ab.$$

La première méthode ne donne pas cette identité.

Considérons, enfin, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (b^2 - d^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 + 4bd(a^2 + c^2) - 4ac(b^2 + d^2).$$

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ b' & c' & d' & a' \\ c' & d' & .. & .. \\ d' & a' & .. & .. \end{vmatrix}.$$

On aura

$$P = \Delta, \Delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

en écrivant, pour abréger,

$$\begin{aligned} 1 &= aa' + bb' + cc' + dd', \\ 2 &= ab' + bc' + cd' + da', \\ 3 &= ac' + bd' + ca' + db', \\ 4 &= ad' + ba' + cb' + dc'. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le produit des deux formes*

$$(b^2 - d^2 + a^2 - c^2)(b^2 - d^2 - a^2 + c^2) + 4(ad - bc)(ab - cd),$$

$$(b'^2 - d'^2 + a'^2 - c'^2)(b'^2 - d'^2 - a'^2 + c'^2) + 4(a'd' - b'c')(a'b' - c'd')$$

est une forme de même espèce, précédée du signe (—).

Considérons, d'autre part, l'équation binome

$$x^4 - 1 = 0,$$

et soit α l'une des racines ; le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

peut s'écrire, en remarquant que si l'on pose

$$A = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3,$$

on a

$$\frac{A}{\alpha} = b + c\alpha + d\alpha^2 + a\alpha^3,$$
$$\frac{A}{\alpha^2} = c + d\alpha + a\alpha^2 + b\alpha^3,$$
$$\frac{A}{\alpha^3} = d + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3;$$

$$\Delta = A \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ \frac{1}{\alpha} & c & d & a \\ \frac{1}{\alpha^2} & d & a & b \\ \frac{1}{\alpha^3} & a & b & c \end{vmatrix}.$$

On en conclut, facilement, que Δ est divisible par le produit des quatre valeurs obtenues en remplaçant dans A, α, par les quatre racines de $x^4 - 1 = 0$, c'est-à-dire par 1, -1, i et $-i$. Or, le produit des quatre polynomes ainsi formés peut s'écrire

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

Ce produit est égal à $-\Delta$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Le produit des deux formes*

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2],$$
$$P_1 = (a' + b' + c' + d')(a' - b + c' - d')[(a' - c')^2 + (b' - d')^2]$$

est une forme de même espèce,

$$R = -[A + B + C + D][A - B + C - D] \times [(A - C)^2 + (B - D)^2]$$

avec

$$\begin{aligned} A &= aa' + bb' + cc' + dd', \\ B &= ab' + bc' + cd' + da', \\ C &= ac' + bd' + ca' + db', \\ D &= ad' + ba' + cb' + dc'. \end{aligned}$$

Le résultat est général. Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & .. & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ .. & .. & \dots & .. & .. \\ a_n & a_1 & \dots & .. & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

et l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

dont les racines sont $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$; on a

$$\Delta = \pm \Pi (a_1 + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_1^2 + \dots + a_n \alpha_1^{n-1}).$$

Si nous remplaçons les $a_1 a_2 \dots a_n$ par $b_1 b_2 \dots b_n$, nous aurons un autre déterminant de même espèce

$$\Delta_1 = \pm \Pi (b_1 + b_2\alpha_1 + \dots + b_n \alpha_1^{n-1})$$

et le produit $\Delta\Delta_1$ sera un déterminant de la même espèce

$$D = \Delta, \Delta_1 = \Pi (A_1 + A_2\alpha_1 + \dots + A_n \alpha_1^{n-1})$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ A_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

d'où une identité très générale.

D'ailleurs, le déterminant Δ n'est autre que le *résul-*

tant, à un facteur près, des polynomes

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1.$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ est, d'une part, le produit des résultants des deux polynomes

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1},$$
$$b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1,$$

et, d'autre part, le résultant du produit

$$A = (a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1})(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1})$$

et de

$$x^n - 1.$$

On peut, dans tout ce qui précède, supposer nul un coefficient, ou même en supposer plusieurs nuls. Considérons, par exemple, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & c & 0 & a \\ c & 0 & a & b \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix}$$

et l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta &= -[a+b+c][a-b+c][a+ib-c][a-ib-c] \\ &= -[(a+c)^2 - b^2][(a-c)^2 + b^2]. \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta_1 = -[(a_1 + c_1)^2 - b_1^2][(a_1 - c_1)^2 + b_1^2].$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ sera égal à R, et l'on aura

$$\begin{aligned} R = -[A+B+C+D][A-B+C-D] \\ \times [(A-C)^2 + (B-D)^2], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= aa_1 + bb_1 + cc_1,\\
B &= ab_1 + bc_1,\\
C &= ac_1 + ca_1,\\
D &= ba_1 + cb_1
\end{aligned}$$