Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 361-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__361_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2121.

(1909, p. 142.)

On demande d'établir les propriétés suivantes de la suite (U) *de Fibonacci, définie par la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

avec

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

1° *Si* α *désigne un nombre premier, la suite* (U) *contient une infinité de termes multiples de* α. *Soit* u_A *le plus petit de ces termes. Le nombre* A *divise* $\alpha - 1$ *si*

$$\alpha = \text{mult. } 10 \pm 1$$

et $\alpha + 1$ *si*

$$\alpha = \text{mult. } 10 \pm 3.$$

2° *Si p désigne un nombre premier, on a*

$$u_p = \text{mult. } 2p + 1 \quad si \quad p = \text{mult. } 10 \pm 1,$$

et

$$u_p = \text{mult. } 2p - 1 \quad si \quad p = \text{mult. } 10 \pm 3.$$

Si u_p n'est pas premier, ses facteurs premiers sont de la forme

$$2kp \pm 1.$$

En désignant par α, β, γ, ... ces facteurs, on a

$$u_p = \alpha\beta\gamma\ldots.$$

Alors u_p est le plus petit nombre de la suite divisible séparément par les nombres premiers α, β, γ, ...

G. HILLERET.

SOLUTION

Par M. A. GÉRARDIN.

Il serait facile de démontrer rapidement certaines parties de cette question non résolue, mais j'estime préférable d'en faire remonter tout l'honneur à Édouard Lucas, en citant simplement quelques extraits de ses « Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure », éditées dans le *Bullettino* du Prince Boncompagni (Rome, 1877, p. 129-193 et 239-293) et surtout des pages 131 à 170 pour la présente question.

« ... Nous signalerons plus particulièrement dans ce travail, une question fort curieuse du LIBER ABBACI qui renferme le premier exemple de séries récurrentes .... On retrouve cette série, quatre siècles plus tard, dans la dernière des annotations d'Albert GIRARD (mort en 1633), sur la traduction française qu'il fit lui-même du cinquième et du sixième livre de l'*Arithmétique* de DIOPHANTE .... En 1753, le Dr Robert SIMSON ... a fait remarquer que la série en question est donnée par le calcul des *quotients* et des *fractions convergentes* des expressions irrationnelles

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

qui représentent respectivement les valeurs de

$$2\sin\frac{\pi}{10} \quad \text{et} \quad 2\sin 3\frac{\pi}{10}, \quad \ldots.$$

» Gabriel LAMÉ ..., dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 octobre 1844, indique l'application qu'on peut faire de cette série, à la détermination d'une limite supérieure du nombre des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, lorsque l'on emploie la méthode ordinaire de la division ....

» Jacques BINET ..., dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 novembre 1844, remarque que la série de Lamé 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... est identique à celle qui lui avait donné le dénombrement des combinaisons discontiguës, et dont il avait parlé dans un autre travail présenté à la même Académie le 25 septembre 1843 ....

» La série dite de Lamé, mais considérée pour la première fois par Léonard de Pise, ainsi que nous venons de le dire, est une série récurrente donnée par la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \tag{1}$$

et par les deux conditions initiales

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

» L'expression d'un terme quelconque de cette série est donnée, en fonction de son rang, par la formule

$$\sqrt{5}\, u_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n \tag{2}$$

qu'il est facile de vérifier *a posteriori* ....

» ... Les termes de rang impair de la série de Lamé ne peuvent contenir qu'une seule fois le facteur 2, et seulement les facteurs premiers impairs de la forme $4p+1$. Nous verrons plus loin que u_{2n+1} ne contient le facteur 2 que lorsque $2n+1$ est un multiple de 3 ....

» La série de Lamé peut être considérée comme le résultat du calcul des réduites successives de la fraction continue périodique

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$$

prolongée indéfiniment, qui représente le développement de l'irrationnelle

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \ldots.$$

» Nous ferons encore observer que la série en question se trouve implicitement renfermée dans le tableau des coefficients des diverses puissances du binome, c'est-à-dire dans le *Triangle arithmétique* de Pascal ....

» ... u_{mn} est toujours exactement divisible par u_m et par u_n, et par leur produit, si m et n sont premiers entre eux. On déduit aussi de ce résultat qu'un terme quelconque u_p de la série ne peut être premier que lorsque p désigne lui-même un nombre premier ....

» Si n désigne un nombre impair quelconque, les diviseurs de $\frac{u_{3n}}{u_n}$ sont des diviseurs de la forme quadratique $5x^2 - 3y^2$.

» On sait d'ailleurs que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des formes

$$\pm(u^2 - 15v^2), \qquad \pm(5u^2 - 3v^2),$$

et que les diviseurs linéaires impairs sont compris dans l'une des formes suivantes :

$$60q + 1, 49, 11, 59, \qquad 60q + 7, 43, 17, 53, \qquad \ldots.$$

» Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de $\frac{u_{3n}}{u_n}$ sont des diviseurs de la forme quadratique $5x^2 + 3y^2$.

» On sait encore que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des deux formes

$$u^2 + 15v^2, \quad 3u^2 + 5v^2$$

et que les diviseurs impairs correspondants sont

$$30q + 1, 19, \quad 30q + 17, 23, \quad \ldots.$$

» Supposons p premier impair et u_n divisible par p^λ; on voit alors que u_{pn} est divisible par $p^{\lambda+1}$, et non par une autre puissance de p; de là le théorème suivant qui exprime LA LOI DE LA RÉPÉTITION de la présence d'un nombre premier dans la série de Fibonacci :

» THÉORÈME. — *Si n désigne le rang d'un terme de la série contenant le facteur premier p à la puissance λ, le rang du premier terme de cette série divisible par la puissance $\lambda+1$ de p, et non par une puissance supérieure, est égal à pn ....*

» Nous verrons plus loin que n est toujours un diviseur de $p \pm 1$ .... »

Ed. Lucas donne ensuite les diviseurs linéaires des formes $\dfrac{u_{4n}}{u_{2n}}$.

« ... Nous allons faire voir maintenant que la série de Lamé contient sans aucune exception tous les nombres premiers, à des rangs nettement déterminés, et démontrer le théorème suivant qui exprime la LOI DE L'APPARITION d'un nombre premier, dans cette série :

» THÉORÈME. — *Si p désigne un nombre premier de la forme $10q \pm 1$, le terme de rang $p-1$ dans la série de Lamé est divisible par p, et si p désigne un nombre premier de la forme $10q \pm 3$, le terme de rang $p+1$ dans la série de Lamé est divisible par p ....*

» 1° En effet, supposons d'abord que le nombre premier p soit de la forme $10q \pm 3$. On a

$$2^p u_{p+1} = C_{p+1,1} + 5C_{p+1,3} + \ldots + 5^{\frac{p-1}{2}};$$

si l'on remarque que $C_{p+1,n}$ est divisible par le nombre premier p, lorsque n est différent de 1 ou de $p-1$, et que $C_{p+1,1}$ est égal à $p+1$, on obtient, suivant le module p, la congruence

$$2^p u_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Mais, puisque 5 est non-résidu quadratique de tout nombre impair de la forme $5n \pm 2$, le second membre de la congruence est un multiple de p, en vertu du théorème de Fermat qui donne la relation

$$5^{p-1}-1\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

qu'on peut écrire

$$\left[5^{\frac{p-1}{2}}-1\right]\left[5^{\frac{p-1}{2}}+1\right]\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

» Il en résulte que $2^p u_{p+1}$, et par suite u_{p+1}, est divisible par p; c'est la première partie du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

» 2° Désignons maintenant par p un nombre premier de la forme $10q\pm 1$; on a alors

$$2^{p-2}u_{p-1}=C_{p-1,1}+5C_{p-1,3}+\ldots+5^{\frac{p-3}{2}}.$$

» Mais si nous remarquons que, pour le module premier p, on a généralement

$$(10) \qquad C_{p-1,2n+1}\equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

il en résulte

$$2^{p-2}u_{p-1}\equiv -\left[1+5+5^2+\ldots+5^{\frac{p-3}{2}}\right] \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

et, par suite,

$$2^p u_{p-1}\equiv 1-5^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

» Mais, puisque 5 est résidu quadratique de tous les nombres premiers qui sont résidus quadratiques de 5, le second membre de la congruence est divisible par p, il en est donc de même de u_{p-1} .... »

(*Cf.* 121 à 123, *Disquis. Arith.* de Gauss.)

« ... THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Lorsque, dans la série de Lamé, le terme de rang* $p+1$ *est divisible par* p, *sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de* $p+1$ *le soit, le nombre* p *est un nombre premier, et l'on a*

$$p=10q\pm 3;$$

de même, lorsque le terme de rang $p-1$ *est divisible par* p, *sans qu'aucun des termes dont le rang est un divi-*

seur de $p - 1$ *le soit, le nombre* p *est un nombre premier, et l'on a*

$$p = 10q \pm 1 \; \ldots . \text{»}$$

Bibliographie abrégée.

Scritti di Leonardo Pisano, vol. I, p. 283-284.

L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges, p. 677.

Philos. Transact. of the R. Soc of London ... par Hutton, vol. X, 1809, p. 430.

C. R., t. 17, 1843, p. 562; t. 19, 1844, p. 867 et 939; t. 49, 1856, p. 873; t. 82, 1876, p. 165 et 1303; t. 83, 1876, p. 1286; t. 84, 1877, p. 439 et suiv.

Plana, *Mem. d. R. Ac. d. Sc. di Torino*, 2e série, t. 20, p. 91, et 1876, p. 928.

J. de Crelle, 1828, p. 87.

N. C., 1876, p, 74.

Genocchi, *Annali di Mat.*, 1868, p. 256.

A. F. A. S., 1876, art. Ed. Lucas.

N. A., 2e série, t. 14, 1875, p. 523 et suiv.

Ed. Lucas, *Sur la theorie des fonctions numériques simplement périodiques*, 1878.

Interm. des Math. et *Sphinx Œdipe*, *passim*.

J'ajoute que Ed. Lucas a donné le tableau des 60 premiers termes de la série de Fibonacci, avec leurs facteurs propres et impropres.

Addition, par M. H. Brocard.

Depuis la publication susmentionnée de 1877, on a obtenu la preuve authentique du décès d'Albert Girard, non en 1633, mais dans les premiers jours de décembre 1632 (Voir *Interm. des Math.*, 1895, p. 193, rép. 373).

Il est juste aussi de rappeler que dans le présent journal (1853, p. 195) Terquem a, le premier, signalé que le titre de *siamélois* d'Albert Girard voulait dire natif de Saint-Mihiel (chef-lieu de canton de la Meuse).