Nouvelles annales de mathématiques

Mathieu Weill

Sur quelques équations quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 351-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__351_1>

[I19a]

SUR QUELQUES ÉQUATIONS QUADRATIQUES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Cherchons une solution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = mz^2$$

(x et y devant être premiers entre eux).

Si m est un nombre premier de la forme $4p+3$, ou un produit de facteurs premiers dont un, au moins, est de cette forme, l'équation est impossible; car on sait que tout nombre qui divise une somme de deux carrés premiers entre eux est, lui-même, une somme de deux carrés, et un nombre premier de la forme $4p+3$ n'est pas une somme de deux carrés.

Soit donc m un nombre premier de la forme $4p+1$, on aura

$$m = a^2 + b^2,$$

et l'équation

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) z^2$$

admet la solution

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = 1.$$

Pour avoir d'autres solutions, posons

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda\delta, \\ y &= b + \lambda'\delta, \\ z &= 1 + \delta, \end{aligned}$$

d'où

$$\delta = \frac{2(a^2 + b^2) - 2a\lambda - 2b\lambda'}{\lambda^2 + \lambda'^2 - a^2 - b^2},$$

$$z = (a - \lambda)^2 + (b - \lambda')^2 = u^2 + v^2,$$

$$z^2 = (u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = K^2 + L^2,$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) z^2 = (aK + bL)^2 + (aL - bK)^2;$$

$$\begin{aligned} x &= aK + bL = a(u^2 - v^2) + 2buv, \\ y &= aL - bL = a.2uv - b(u^2 - v^2), \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Soit, par exemple,

$$x^2 + y^2 = 5z^2, \qquad a = 1, \qquad b = 2;$$

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 + 4uv, \\ y &= 2uv - 2(u^2 - v^2), \\ z &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

II. Si m est un produit de facteur premiers, tous de la forme $4p + 1$. on aura m sous la forme d'un produit de nombres dont chacun est une somme de deux carrés, le produit est donc, de plusieurs manières, une somme de deux carrés, ce qui donne plusieurs groupes de solutions.

Soit

$$\begin{aligned} m = 13.17 &= (3^2 + 2^2)(4^2 + 1^2) \\ &= (14^2 + 5^2) \\ &= (10^2 + 11^2), \end{aligned}$$

d'où

$$x^2 + y^2 = (14^2 + 5^2) z^2,$$
$$x^2 + y^2 = (10^2 + 11^2) z^2,$$

ce qui donne deux groupes de solutions.

III. Soit l'équation

$$ax^2 + by^2 = (a + b) z^2,$$

elle admet la solution

$$x = 1,$$
$$y = 1,$$
$$z = 1,$$

d'où, en posant

$$x = 1 + \lambda\delta,$$
$$y = 1 + \lambda'\delta,$$
$$z = 1 + \delta,$$

$$x = -a(\lambda - 1)^2 + b\lambda'^2 - 2b\lambda\lambda' - b + 2\lambda b,$$
$$y = -b(\lambda' - 1)^2 + a\lambda^2 - 2a\lambda\lambda' - a + 2\lambda' a,$$
$$z = \quad a(\lambda - 1)^2 + b(\lambda' - 1)^2.$$

On peut, plus généralement, considérer l'équation

$$ax^2 + by^2 = (a + m^2 b) z^2$$

qui admet la solution

$$x = 1,$$
$$y = m,$$
$$z = 1,$$

et l'on trouve ensuite, comme précédemment, les valeurs générales de x, y, z.

IV. Soit

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

Si $a + b$ est un carré m^2, on a comme solution

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad z = m;$$

on a ensuite la solution générale.

Soit

$$ax^2 + aby^2 = z^2$$

si a est un carré m^2, on posera

$$z = mz',$$

d'où

$$x^2 + by^2 = z'^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2 - b\lambda'^2, \\ y &= 2\lambda\lambda', \\ z &= m(\lambda^2 + b\lambda'^2). \end{aligned}$$

Soit

$$ax^2 + by^2 = z^2;$$

posons

$$\begin{aligned} x &= \alpha + b\beta, \\ y &= \alpha - a\beta, \end{aligned}$$

d'où

$$(a+b)\alpha^2 + ab(a+b)\beta^2 = z^2.$$

Si $a+b$ est un carré m^2, on est ramené au cas précédent.

Si ab est un carré m^2, en posant $m\beta = \beta'$, on a

$$(a+b)\alpha^2 + (a+b)\beta'^2 = z^2,$$

d'où

$$z = (a+b)z'$$

et

$$\alpha^2 + \beta'^2 = (a+b)z'^2.$$

On est ramené à la première équation de cette Note. On peut y arriver directement en observant que si, dans l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^2,$$

ab est un carré, on trouve, après avoir enlevé les facteurs premiers qui entrent à des puissances paires dans a et b, une équation de la forme

$$Kx^2 + Ky^2 = z^2,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = Kz'^2.$$

Remarque. — Il n'existe aucune méthode pour trouver *une* solution de l'équation

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

En prenant, par exemple, $x = 1$, on est ramené à l'équation

$$z^2 - by^2 = a,$$

équation qui présente les plus grandes difficultés et qui n'a pu être résolue que dans un petit nombre de cas particuliers. Ceci montre combien l'équation générale

$$ax^2 + by^2 = cz^2,$$

même pour des valeurs très simples des nombres a, b, c, est difficile à aborder.