AURIC

Sur le barycentre des triangles pseudopodaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 305-310

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__305_1>

[K^1 1 c]

SUR LE BARYCENTRE DES TRIANGLES PSEUDOPODAIRES;

PAR M. AURIC.

Considérons, dans un triangle de référence $A_1 A_2 A_3$, deux points M, N dont les coordonnées barycentriques sont m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3.

Par M menons une parallèle à $A_1 N$ qui coupe $A_2 A_3$ en M_1; on mène deux autres droites analogues qui déterminent deux autres points M_2, M_3 ; le triangle

$$M_1M_2M_3$$

sera appelé *pseudopodaire* de M par rapport à N ; il est clair que si N est l'orthocentre H de $A_1A_2A_3$, $M_1M_2M_3$ est le triangle podaire de M ; si M et N viennent coïncider en un point quelconque P, on obtient le triangle cévien ou pédal de P.

Les coordonnées barycentriques de M_1, M_2, M_3 sont

$$\begin{array}{ccc} 0, & m_2+\dfrac{n_2m_1}{n_2+n_3}, & m_3+\dfrac{n_3m_1}{n_2+n_3}, \\ m_1+\dfrac{n_1m_2}{n_3+n_1}, & 0, & m_3+\dfrac{n_3m_2}{n_3+n_1}, \\ m_1+\dfrac{n_1m_3}{n_1+n_2}, & m_2+\dfrac{n_2m_3}{n_1+n_2}, & 0. \end{array}$$

Dès lors le barycentre U de $M_1M_2M_3$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_1 &= 2m_1+n_1\left(\frac{m_2}{n_3+n_1}+\frac{m_3}{n_1+n_2}\right) \\ &= \left(2-\frac{n_1}{n_2+n_3}\right)m_1+n_1\left(\frac{m_1}{n_2+n_3}+\frac{m_2}{n_3+n_1}+\frac{m_3}{n_1+n_2}\right) \end{aligned}$$

et deux autres expressions analogues.

Lorsque M et N viennent coïncider en P la coordonnée u_1 peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_1 = p_1\left(3+\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_1}+\frac{p_3}{p_1+p_2}\right) \\ -(p_1+p_2+p_3)\frac{p_1}{p_2+p_3} \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$u_1=\frac{p_1}{p_3+p_1}+\frac{p_1}{p_1+p_2},$$

car alors les coordonnées du triangle pédal sont

$$\begin{array}{ccc} 0, & \dfrac{p_2}{p_2+p_3}, & \dfrac{p_3}{p_2+p_3}, \\ \dfrac{p_1}{p_3+p_1}, & 0, & \dfrac{p_3}{p_3+p_1}, \\ \dfrac{p_1}{p_1+p_2}, & \dfrac{p_2}{p_1+p_2}, & 0. \end{array}$$

Pour que U soit situé sur la droite MN, on doit avoir

$$\frac{n_1 m_1}{n_2+n_3} = \mu n_1 - \lambda m_1$$

ou

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2+n_3} + \frac{\lambda}{n_1}$$

et, par élimination de λ et de μ,

$$\Sigma\, n_1(n_2^2 - n_3^2) m_2 m_3 = 0.$$

Lorsque N est donné cette équation représente une conique circonscrite au triangle de référence et passant par N, par l'inverse de $N\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}\right)$ et par le complémentaire de $N(n_2+n_3,\ n_3+n_1,\ n_1+n_2)$: cette conique qui joue un rôle assez important dans la géométrie du triangle est la transformée inverse de la droite qui joint un point N à son inverse (N^{-1}).

On a donc le théorème suivant :

Si N, *son inverse* (N^{-1}) *et l'inverse de* $M(M^{-1})$ *sont en ligne droite, le barycentre du triangle pseudopodaire de* M *par rapport à* N *est sur la droite* MN.

Lorsque M est donné, l'équation précédente représente une cubique circonscrite au triangle de référence et passant par M, par l'inverse de $M(M^{-1})$, par l'anticomplémentaire de M

$$(m_2+m_3-m_1,\ m_3+m_1-m_2,\ m_1+m_2-m_3)$$

et par le barycentre G de $A_1 A_2 A_3$. Cette cubique est une transformée homographique de la cubique lieu des centres des coniques circonscrites à $A_1 A_2 A_3$ et dont les normales en ces trois points sont concourantes : le lieu du point de concours est également, comme on sait, une transformée homographique de cette cubique.

Le barycentre U vient en N pour $\lambda = -2$, c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2 + n_3} - \frac{2}{n_1},$$

U vient en M pour $\lambda = 1$ et λ racine de l'équation

$$X^2 + X + \frac{2 n_1 n_2 n_3}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)(n_3 + n_1)} = 0;$$

il y a donc trois positions (réelles ou imaginaires) de M pour lesquelles N étant donné le barycentre de $M_1 M_2 M_3$ est en M.

Lorsque M est le complémentaire de N

$$(m_1 = n_2 + n_3, \ \ldots),$$

on a

$$u_1 = 2 m_1 + 2 n_1 = 2(n_1 + n_2 + n_3),$$

le barycentre de $M_1 M_2 M_3$ coïncide avec celui de $A_1 A_2 A_3$ et cela était aisé à prévoir puisque, dans ce cas, M_1 est le milieu de $A_2 A_3$, M_2 celui de $A_3 A_1$, etc. en vertu de la relation

$$NG = 2 GM.$$

On peut se demander dans quel cas un triangle pseudopodaire est également pédal, c'est-à-dire homologique de $A_1 A_2 A_3$; il suffit d'écrire l'égalité des deux termes diagonaux du déterminant formé par les coordonnées de ce triangle.

On obtient après réductions

$$\begin{aligned}&\Sigma n_1^2(n_2+n_3)m_2m_3(m_2-m_3)\\&\quad=\Sigma n_1(n_3^2-n_2^2)m_2m_3(m_2+m_3).\end{aligned}$$

Selon qu'on se donne M ou N on a une cubique circonscrite au triangle de référence pour le lieu de l'autre point; mais le problème se simplifie beaucoup si l'on se place dans l'hypothèse du théorème de Kariya ([1]), c'est-à-dire si l'on admet que les inverses de M, de N et du centre d'homologie P, soit (M^{-1}), (N^{-1}), (P^{-1}), sont en ligne droite.

On trouve aisément que

$$\mu m_1^2=\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3},$$

d'où

$$\frac{\lambda}{n_1}=m_2^2+m_3^2-m_1^2.$$

Le point $(m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2)$ que nous représenterons par (M^2) est alors le complémentaire de (N^{-1}).

Le centre d'homologie P de $M_1M_2M_3$ et $A_1A_2A_3$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{m_2+m_3-m_1},\quad\frac{1}{m_3+m_1-m_2},\quad\frac{1}{m_1+m_2-m_3},$$

de sorte que (P^{-1}) est l'anticomplémentaire de M.

Le barycentre de $M_1M_2M_3$ se trouve à la fois sur la droite qui joint P à l'inverse de M et sur celle qui joint M au point $\left(\frac{m_1^2}{n_1},\frac{m_2^2}{n_2},\frac{m_3^2}{n_3}\right)$ que nous désignerons par $\left(\frac{M^2}{N}\right)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui est une généralisation de celui de Kariya :

([1]) Voir *Nouvelles Annales*, numéro de mai 1915, p. 222.

Soit $M_1M_2M_3$ *le triangle pseudopodaire de* M *par rapport à* N : *admettons en outre que* $M_1M_2M_3$ *est le triangle pédal d'un point* P *et que* M, N, P *sont sur une conique* C *circonscrite à* $A_1A_2A_3$. *Si l'on prend sur les droites* MM_1, MM_2, MM_3 *des points* Q_1, Q_2, Q_3 *tels que*

$$\frac{MM_1}{MQ_1} = \frac{MM_2}{MQ_2} = \frac{MM_3}{MQ_3},$$

les droites A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 *concourent en un point* Q *dont le lieu est précisément la conique* C *lorsque le rapport ci-dessus varie. Le barycentre de* $M_1M_2M_3$ *se trouve à l'intersection des droites*

$$P(M^{-1}) \qquad \text{et} \qquad M\left(\frac{M^2}{N}\right).$$

En particulier, dans le cas du théorème de Kariya proprement dit, M est le centre du cercle inscrit I, N l'orthocentre H, P le point de Gergonne, (M^{-1}) le point de rencontre des antibissectrices et

$$\left(\frac{M^2}{N}\right) = (\sin 2A_1,\ \sin 2A_2,\ \sin 2A_3)$$

le centre du cercle circonscrit O.

On a donc la proposition suivante :

Le centre de gravité du triangle podaire de I *se trouve à l'intersection de la droite* OI *avec celle qui joint le point de Gergonne à l'inverse de* I.

Cette proposition s'applique également aux cercles ex-inscrits à la condition de prendre les points correspondants.