Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__287_1>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

383 (**1857**, 182). — Soient donnés dans un même plan : 1° une courbe algébrique par une équation de degré n ; 2° un triangle dont les côtés sont représentés par les trois équations linéaires

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0;$$

d'un point quelconque M, pris sur la courbe, abaissons sur les côtés du triangle p, q, r respectivement les perpendiculaires P, Q, R; construisons une seconde courbe dont les points aient pour coordonnées $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$; démontrer : 1° que la seconde courbe est aussi de degré n; 2° que l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants M, m des deux courbes est de degré $2n$.

400 (**1857**, 391). — Soit u une fonction *rationnelle* et *entière* du degré n d'un nombre *quelconque* de variables x, y, z, ..., et soient du, d^2u, ..., d^nu les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, ... sont *constantes* (¹). Formons l'équation

$$\begin{aligned} t^n d^n u + u t^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u \\ + n(n-1)(n-2) t^{n-3} d^{n-3} u + \ldots \\ + n(n-1)(n-2)\ldots 2 t\, du \\ + n(n-1)(n-2)\ldots 2.1\, u = 0. \end{aligned}$$

(¹) Alors du renferme dx, dy, dz; d^2u renferme dx^2, $dx\,dy$, dy^2, ... et $d^{n+1} = 0$.

Formons une fonction symétrique *quelconque* rationnelle et entière des *différences* des racines de cette équation; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u$, $d^{n-1} u$, $d^{n-2} u$, ..., du, u et, par conséquent, une fonction de x, y, z, ..., dx, dy, dz; si l'on différencie cette dernière fonction en traitant dx, dy, dz, ... comme des constantes, on trouve un résultat *identiquement* nul. MICHAEL ROBERTS.

NOTE DU RÉDACTEUR.

Exemple. — Soit

$$n = 2, \qquad u = ax^2 + by^2 + cz^2,$$
$$du = 2(ax\,dx + by\,dy + cz\,dz),$$
$$d^2 u = 2(a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2);$$

l'équation en t est $t^2 d^2 u + 2t\,du + 2u = 0$. Choisissons comme fonction symétrique la somme des carrés des différences des racines; cette somme est

$$4(du^2 + 2u\,d^2 u) = -16[ab(x\,dy - y\,dx)^2 + ac(x\,dz - z\,dx)^2 + bc(y\,dz - z\,dy)^2];$$

différentiant cette valeur en regardant dx, dy, dz comme constantes, le résultat est identiquement nul.