Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 275-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__275_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

261.

(1852, p. 368.)

Trouver l'équation de la courbe, laquelle coupe sous un angle constant toutes les lignes géodésiques sur une surface développable, issues d'un point fixe sur la surface.

STREBOR.

SOLUTION
Par M. R.-B.

Quand on développe la surface considérée, les géodésiques deviennent des lignes droites. Les trajectoires obliques d'un faisceau de droites sont, comme on sait, des spirales logarithmiques. Donc les courbes demandées sont celles qui, après développement de la développable, deviennent des spirales logarithmiques.

Quant à leur équation, elle sera en général fort compliquée.

Autre réponse, analogue, de M. H. BROCARD.

512.

(1860, p. 44)

Lorsqu'un corps peut tourner autour de six axes indépendants, on peut le faire tourner autour d'un axe quelconque.

MÖBIUS.

SOLUTION
Par M. R.-B.

L'énoncé est bien vague. On peut le préciser comme il suit : supposons un corps indéformable, soumis à des liaisons telles qu'à partir d'une de ses positions on puisse, tout en respectant ces liaisons, lui donner six rotations *infiniment petites* dont les axes n'aient pas entre eux de relations géométriques particulières. Alors, en donnant aux rapports mutuels des angles de ces rotations toutes les valeurs possibles, elles définiront, par leurs compositions, tous les mouvements infiniment petits possibles à partir de la position considérée, et, en particulier, toutes les rotations infiniment petites.

Il s'agit là d'un fait banal.

513.

(1860, p. 44.)

Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que six, il est toujours possible de trouver des forces qui, agissant suivant ces droites, se fassent équilibre : lorsque le nombre des droites est moindre, cette possibilité exige encore certaines conditions. MÖBIUS.

SOLUTION

Par M. R.-B.

La proportion est aujourd'hui banale, et il est même surprenant qu'elle ne fût pas telle en 1860. Sept droites prises au hasard sont les lignes d'action de forces en équilibre (déterminées à un facteur constant près). Si le nombre des droites se réduit à 6, 5 ou 4, il faut, pour qu'elles supportent des forces en équilibre, qu'elles appartiennent respectivement à un complexe linéaire, à une congruence linéaire, à une demi-quadrique. S'il y a trois droites, elles doivent former un faisceau. S'il y en a deux, elles doivent être confondues.

1981.

(1903, p. 432.)

Toutes les coniques réelles qui passent par le point double d'un limaçon de Pascal et lui sont tritangentes sont des ellipses égales entre elles. R. BRICARD.

SOLUTION

Par M. E. FABRY.

En posant

$$\tang\frac{\omega}{2} = t,$$

le limaçon de Pascal est représenté par les équations

$$x = (a + b\cos\omega)\cos\omega = \frac{a + b + (a - b)t^2}{(1 + t^2)^2}(1 - t^2),$$

$$y = (a + b\cos\omega)\sin\omega = \frac{a + b + (a - b)t^2}{(1 + t^2)^2}\,2t.$$

Une conique passant par l'origine (point double à tangentes imaginaires) a pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0;$$

elle coupe le limaçon en six autres points donnés par l'équation

$$\begin{aligned}[a + b + (a - b)t^2]\,[A(1 - t^2)^2 + 4Bt(1 - t^2) + 4Ct^2]& \\ + 2(1 + t^2)^2[D(1 - t^2) + 2Et] &= 0.\end{aligned}$$

La conique sera tritangente au limaçon si cette équation a trois racines doubles; son premier membre sera alors de la forme

$$(\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)^2,$$

ce qui donne les sept relations

$$\begin{gathered}A(a - b) - 2D = \alpha^2, \\ 2B(b - a) + 2E = \alpha\beta, \\ A(3b - a) + 4C(a - b) - 2D = \beta^2 + 2\alpha\gamma, \\ -4Bb + 4E = \alpha\delta + \beta\gamma, \\ -A(3b + a) + 4C(a + b) + 2D = \gamma^2 + 2\beta\delta, \\ 2B(a + b) + 2E = \gamma\delta, \\ A(a + b) + 2D = \delta^2.\end{gathered}$$

Les deux premières, les deux dernières, et la somme de la troisième et de la cinquième, résolues par rapport à A, B, C, D, E, donnent

$$\begin{aligned} 2Aa &= \alpha^2 + \delta^2, \\ 4Da &= (a - b)\delta^2 - (a + b)\alpha^2, \\ 4Ba &= \gamma\delta - \alpha\beta, \\ 4Ea &= (a + b)\alpha\beta + (a - b)\gamma\delta, \\ 8Ca &= (\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2.\end{aligned}$$

Il reste deux relations qui, par l'élimination de A, B, C, D, E, donnent

$$a(\alpha-\gamma)(\delta-\beta) = 2b(\alpha\beta-\gamma\delta),$$

$$a[(\delta-\beta)^2-(\alpha-\gamma)^2]$$
$$= b[2\alpha^2+2\delta^2-2\beta^2-2\gamma^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2].$$

Posons

$$\gamma = \alpha + u, \qquad \beta = \delta - v,$$

ce qui donne

$$auv = 2b(\alpha v+\delta u),$$
$$a(v^2-u^2)+b(v^2+u^2) = 4b(\delta v-\alpha u).$$

On peut ainsi exprimer α, β, γ, δ en fonction de u et v

$$4b\alpha = (a-b)u, \qquad 4b\gamma = (a+3b)u,$$
$$4b\delta = (a+b)v, \qquad 4b\beta = (a-3b)v,$$

et les coefficients de l'équation de la conique deviennent

$$64\,\mathrm{A}\,ab^2 = 2(a-b)^2u^2+2(a+b)^2v^2,$$
$$64\,\mathrm{B}\,ab^2 = 8abuv,$$
$$64\,\mathrm{C}\,ab^2 = 2(a+b)^2u^2+2(a-b)^2v^2,$$
$$64\,\mathrm{D}\,ab^2 = (a^2-b^2)[(a+b)v^2-(a-b)u^2],$$
$$64\,\mathrm{E}\,ab^2 = 2(a^2-b^2)auv.$$

L'équation qui détermine les longueurs des demi-axes (R) de la conique est

$$\mathrm{R}^4-\mathrm{R}^2(\mathrm{A}+\mathrm{C})\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE}}{(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})^2}$$
$$-\frac{(\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE})^2}{(\mathrm{B}^2-\mathrm{AC})^3} = 0.$$

Or on a

$$\mathrm{A}+\mathrm{C} = \frac{a^2+b^2}{16ab^2}(u^2+v^2),$$

$$\mathrm{B}^2-\mathrm{AC} = -\left(\frac{a^2-b^2}{32ab^2}\right)^2(u^2+v^2)^2,$$

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BDE} = \left(\frac{a^2-b^2}{16}\right)^4\frac{(u^2+v^2)^3}{2a^3b^6},$$

$$\mathrm{R}^4-\mathrm{R}^2\frac{a^2+b^2}{2}+\left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2 = 0.$$

Les carrés des demi-axes ont les valeurs positives constantes

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

ces coniques sont des ellipses de grandeur constante, dont le centre peut être réel ou imaginaire.

1992 *bis*.

(1904, p. 144.)

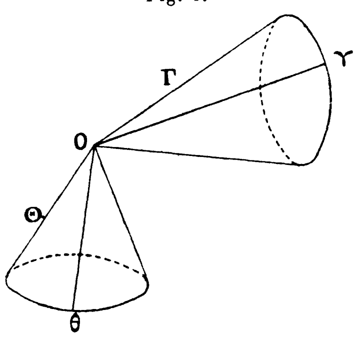
On donne dans l'espace une courbe C. Définir la surface la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne asymptotique.

R. BRICARD.

SOLUTION
Par L'AUTEUR.

Soient M un point quelconque de C (*fig.* 1) MT, la tan-

Fig. 1.



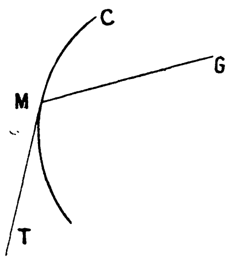
gente en ce point, MG la génératrice, passant en M, d'une surface satisfaisante S. Par un point O fixe menons $O\theta$ parallèle à MT et $O\gamma$ parallèle à MG. Quand M varie sur C, $O\theta$ engendre le cône directeur Θ de la courbe C, et $O\gamma$ engendre le cône directeur Γ de la surface S.

Cela posé, interprétons sur les cônes Θ et Γ les conditions de l'énoncé :

1° C étant la ligne de striction de S, M doit être le point central sur la génératrice G; autrement dit, le plan tangent à S en M, c'est-à-dire le plan MGT, est perpendiculaire au plan tangent dont le point de contact est rejeté à l'infini sur MG. Or ce dernier plan tangent est, comme on sait, parallèle au plan tangent à Γ suivant $O\gamma$, et le plan MGT est parallèle au plan $O\gamma\theta$. On voit donc que le plan $O\gamma\theta$ doit être le plan normal à Γ suivant $O\gamma$.

2° C étant une ligne asymptotique de S, le plan osculateur

Fig. 2.



à C en M doit être tangent à S; autrement dit, le plan osculateur doit être MGT. Or le plan osculateur dont il s'agit est parallèle au plan tangent au cône θ suivant $O\theta$. On voit donc que le plan $O\gamma\theta$ doit être le plan tangent au cône θ suivant $O\theta$.

La solution de la question posée résulte immédiatement de ces considérations : la courbe C étant donnée, le cône θ l'est également. Le cône Γ doit être tel que tous ses plans normaux soient tangents à θ. Sa détermination revient au problème des développantes sur la sphère. Elle dépend, comme on sait, d'une quadrature, et introduit un paramètre arbitraire.

Le cône Γ étant construit, la surface S doit être considérée comme connue.

2014.

(1905, p. 192.)

Les axes des quadriques de révolution par rapport auxquelles deux droites données sont conjuguées engendrent un complexe linéaire.

R. Bricard.

Solution

Par l'auteur.

Remarquons tout d'abord que la conjuguée, par rapport à une quadrique de révolution, d'une droite qui en rencontre l'axe à angle droit, est une droite qui jouit de ces mêmes propriétés, et qui, de plus, est rectangulaire à la première.

Cela est évident, si l'on considère la seconde droite comme intersection des plans tangents à la quadrique aux points où la première droite la rencontre.

Soient alors D et D′ les deux droites données, X l'axe d'une quadrique de révolution (Q) satisfaisante. Je dis que l'hyperboloïde (H) défini par D, D′ et X est *équilatère*.

Il existe en effet, comme on sait, deux génératrices de (H), de système opposé à celui de D, D′, X, et rencontrant X à angle droit. Soient G et G′ ces deux génératrices. Cherchons la conjuguée de G par rapport à (Q). Ce sera, d'après la remarque initiale, une droite rencontrant X à angle droit. En outre, G rencontrant D et D′, sa conjuguée doit rencontrer D et D′.

En définitive, cette conjuguée n'est autre que G′. Il résulte encore de la remarque initiale que G′ est rectangulaire à G.

Ainsi, les deux génératrices de (H) qui rencontrent X à angle droit sont rectangulaires entre elles. Cela entraîne bien la propriété de (H), énoncée plus haut.

On est donc ramené à établir que *les droites* X, *qui déterminent avec deux droites données* D *et* D′ *un hyperboloïde équilatère*, *engendrent un complexe linéaire.*

Voici la démonstration de cette propriété :

Considérons les hyperboloïdes équilatères (H) contenant D et D′ et passant par un point donné A. Ces hyperboloïdes sont assujettis à huit conditions, toutes linéaires par rapport aux coefficients de leur équation ponctuelle. Ils forment donc un faisceau. La base de ce faisceau comprend les droites D, D′, la droite menée par A et s'appuyant sur D et D′, et doit, par conséquent, être complétée par une autre droite G.

On voit donc que toutes les droites X, déterminant avec D et D′ un hyperboloïde équilatère et passant par un point donné A, ont pour lieu un plan (A, G). Cela suffit à établir la proposition.

2078.

(1907, p. 335.)

On appelle u_n *le* $n^{\text{ième}}$ *coefficient du développement de* $\dfrac{1}{1-3x-3x^2-x^3}$ *et* v_n *le* $n^{\text{ième}}$ *coefficient du développement de* $\dfrac{1}{1+3x+3x^2-x^3}$; *démontrer qu'en prenant*

$$X = u_{n+1}, \qquad Z = v_n,$$
$$Y = u_n + u_{n+1}, \qquad T = v_n + v_{n+1},$$

on a

$$2(X^3 + Z^3) = Y^3 + T^3.$$

R. Amsler.

Solution
Par M. L. Chanzy.

Posons en général

$$f(x) = hx^3 + px^2 + qx + r,$$

l'équation $f(x) = 0$ ayant trois racines distinctes. Soient

$$-\frac{1}{f(x)} = \sum_n u_n x^n, \qquad + \frac{1}{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)} = \sum_n v_n x^n,$$

et nous aurons l'identité

$$(1) \qquad \left(\frac{r}{h}\right)^{2n+4} u_{n+1}^3 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) + v_n^3 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 0.$$

Or, dans la question proposée, on peut écrire, suivant une remarque de M. A. Gérardin,

$$f(x) = (x+1)^3 - 2, \qquad \frac{r}{h} = -1.$$

On aura donc, en appliquant l'identité (1),

$$(u_n + u_{n+1})^3 - 2u_{n+1}^3 + (v_n + v_{n+1})^3 - 2v_n^3 = 0,$$

ce qui est bien la relation proposée par M. R. Amsler.

Démonstration de l'identité (1). — Soient a, b, c les racines *supposées distinctes* de $f(x) = 0$. On a

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{f(x)} &= \frac{-1}{h(x-a)(x-b)(x-c)} \\
&= \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left(\frac{b-c}{x-a} + \frac{c-a}{x-b} + \frac{a-b}{x-c}\right) \\
&= \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left[\quad \frac{c-b}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\right)\right. \\
&\qquad + \frac{a-c}{b}\left(1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} + \ldots\right) \\
&\qquad \left. + \frac{b-a}{c}\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{c^2} + \ldots\right)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
u_n = \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)}\left(\frac{c-b}{a^{n+1}} + \frac{a-c}{b^{n+1}} + \frac{b-a}{c^{n+1}}\right).
$$

On a de même

$$
\begin{aligned}
+\frac{1}{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{1}{h(1-ax)(1-bx)(1-cx)} \\
&= \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times \left[\frac{(b-c)a^2}{1-ax} + \frac{(c-a)b^2}{1-bx} + \frac{(a-b)c^2}{1-cx}\right] \\
&= \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&\quad \times [\quad (b-c)a^2(1 + ax + a^2x^2 + \ldots) \\
&\qquad + (c-a)b^2(1 + bx + b^2x^2 + \ldots) \\
&\qquad + (a-b)c^2(1 + cx + c^2x^2 + \ldots)].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
v_n = {} & \frac{-1}{h(a-b)(b-c)(c-a)} \\
& \times [(b-c)a^{n+2} + (c-a)b^{n+2} + (a-b)c^{n+2}].
\end{aligned}
$$

On tire de là

$$u_n - au_{n+1} = \frac{1}{h(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$\times\left(\frac{a-c}{b^{n+1}} + \frac{b-a}{c^{n+1}} - a\frac{a-c}{b^{n+2}} - a\frac{b-a}{c^{n+2}}\right)$$
$$= \frac{1}{h(b-c)}\cdot\frac{c^{n+2}-b^{n+2}}{(bc)^{n+2}};$$

$$v_{n+1} - av_n = \frac{-1}{h(b-c)}(c^{n+2} - b^{n+2}).$$

Donc

$$u_n - au_{n+1} = -\frac{v_{n+1} - av_n}{(bc)^{n+2}}.$$

De même,

$$u_n - bu_{n+1} = -\frac{v_{n+1} - bv_n}{(ca)^{n+2}},$$

$$u_n - cu_{n+1} = -\frac{v_{n+1} - cv_n}{(ab)^{n+2}}.$$

Multipliant membre à membre,

$$u_{n+1}^3 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = -\frac{v_n^3 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)}{(abc)^{2n+4}},$$

et comme

$$abc = -\frac{r}{h},$$

c'est bien l'identité annoncée (1).

Applications. — Outre la solution générale de

$$2(x^3 + z^3) = y^3 + t^3$$

indiquée par M. R. Amsler, on peut tirer de (1) des solutions d'équations indéterminées analogues, du troisième degré, symétriques par rapport à deux couples d'inconnues, en particularisant le polynome $f(x)$.

Soit, par exemple,

$$f(x) = (x+1)^3 - k.$$

Nous aurons

$$(k-1)^{2n+4}[(u_n + u_{n+1})^3 - ku_{n+1}^3] + (v_{n+1} + v_n)^3 - kv_n^3 = 0,$$

et, pour $n = 3h + 1$, cela donnera des solutions de

$$X^3 + Y^3 = k(Z^3 + T^3).$$

Soit, par exemple, $n = 1$,

$$u_1 = \frac{3}{(1-k)^2}, \qquad u_2 = \frac{-3(k+2)}{(1-k)^3}, \qquad v_1 = 3, \qquad v_2 = 6.$$

On a, en supprimant les facteurs communs,

$$(1+2k)^3 + (k-1)^3 = k[(k+2)^3 - (k-1)^3].$$

Pour $k = \lambda^3$, on a un cube somme de trois cubes

$$(\lambda^4 + 2\lambda)^3 = (2\lambda^3 + 1)^3 + (\lambda^3 - 1)^3 + (\lambda^4 - \lambda)^3,$$

formule équivalente à une formule d'Euler (Cf. *S. Œ.*, 1906, p. 93).

En partant de

$$f(x) = (x + l)^3 - k,$$

on a plus simplement

$$(l^3 + m^3)[(3l^2)^3 + (m^2)^3] = (3l^3 + m^3)^3 - (2lm^2)^3,$$

d'où un cube somme de cinq cubes.

Remarques. — 1° La démonstration précédente suppose que le polynome $f(x)$ a ses trois racines distinctes. Un calcul analogue démontre que les conclusions subsistent dans le cas où il a une racine multiple, ce que des considérations de continuité permettaient de prévoir.

2° Si $f = x^2 + px + q$, on trouve par un raisonnement semblable que

$$q^{2n+3} u_{n+1}^2 f\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = v_n^2 f\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right),$$

en posant

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \Sigma u_n x^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{qx^2 + px + 1} = \Sigma v_n x^n.$$

ADDITIONS ET REMARQUES

Par M. A. GÉRARDIN.

Je vais indiquer plusieurs *identités* donnant de nouvelles solutions dès qu'on en possède une

$$2(a^3 + b^3) = c^3 + d^3$$

sans donner ici de détails sur les *méthodes*.

On aura donc pour

$$2(X^3 + Z^3) = Y^3 + T^3,$$

$$X = 2a(a^3 - c^3), \qquad Y = b(2a^3 + c^3),$$

$$Z = c(c^3 - 4a^3), \qquad T = d(2a^3 + c^3).$$

On aura encore

$$X = 2a(a^3 - d^3), \qquad Y = b(2a^3 + d^3),$$

$$Z = c(2a^3 + d^3), \qquad T = d(d^3 - 4a^3)$$

ainsi que

$$X = a(c^3 + 2b^3), \qquad Y = 2b(b^3 - c^3),$$

$$Z = c(c^3 - 4b^3), \qquad T = d(c^3 + 4b^3)$$

et enfin

$$X = a(d^3 + 2b^3), \qquad Y = 2b(b^3 - d^3),$$

$$Z = c(d^3 + 2b^3), \qquad T = d(d^3 - 4b^3).$$

J'ajouterai aussi des solutions générales du problème

$$(m^3 + 3n^3)^3 + (m^3 - 3n^3)^3 = 2[(m^3)^3 + (3mn^2)^3].$$

De même

$$(9u^3 + s^3)^3 + (9u^3 - s^3)^3 = 2[(9u^3)^3 + (3us^2)^3],$$

et si l'on admet les solutions négatives

$$(f^2 + fg - g^2)^3 + (f^2 - fg - g^2)^3 = 2[(f^2)^3 - (g^2)^3].$$

Enfin, on peut trouver, par ma *méthode universelle*, d'autres identités en utilisant des fonctions de deux variables au second degré.

Note. — Quelques solutions numériques pour finir :

$$1 \quad 3 \quad 12 \quad 46 \quad \ldots \quad u_{n+1} = 3u_n + 3u_{n-1} + u_{n-2},$$

$$1 \quad -3 \quad 6 \quad -8 \quad \ldots \quad v_{n+1} = -3v_n - 3v_{n-1} + v_{n-2};$$

$$
\begin{array}{llrrrl}
X = u_{n+1} & = & 3 & 12 & 46 & \ldots, \\
Z = v_n & = & 1 & -3 & 6 & \ldots, \\
Y = u_n + u_{n+1} & = & 4 & 15 & 58 & \ldots; \\
T = v_n + v_{n+1} & = & -2 & 3 & -8 & \ldots,
\end{array}
$$

comme on pourra le vérifier.