NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MATHIEU WEILL

Propriété de certaines formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 266-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__266_1>

[115]

PROPRIÉTÉ DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

THÉORÈME. — *Le produit de deux formes*

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

peut, d'une infinité de manières, être représenté par une forme de même espèce.

On a

$$a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{4}[(2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2].$$

Posons

$$2a - b - c = A, \qquad 2a' - b' - c' = A',$$
$$b - c = B, \qquad b' - c' = B'.$$

On a, identiquement,

$$(A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2) = (AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2$$

Posons

$$2\alpha - \beta - \gamma = AA' + 3BB',$$
$$\beta - \gamma = AB' - AB';$$

d'où

$$2\beta = 2\alpha - AA' - 3BB' + AB - BA'$$
$$= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ab' + 4bc' + 4ca',$$

$$2\gamma = 2\alpha - AA' - 3BB' - AB' + BA'$$
$$= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ac' + 4ba' + 4cb'.$$

D'autre part, on a

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c')$$
$$= \frac{1}{16}(A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2)$$
$$= \frac{1}{16}[(AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2]$$
$$= \frac{1}{4}[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma].$$

Posons $\frac{\alpha}{2} = K$,

$$aa' + bb' + cc' = \lambda,$$
$$ab' + bc' + ca' = \mu,$$
$$ac' + ba' + cb' = \nu,$$

$$L = K - \lambda + \mu,$$
$$M = K - \lambda + \nu,$$

il vient

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c')$$
$$\equiv K^2+L^2+M^2-KL-KM-LM,$$

où K est *arbitraire;* le théorème est donc établi.

En particulier, si l'on fait $K=0$, la forme se réduit à L^2+M^2-LM.

On peut généraliser beaucoup les résultats précédents.

Considérons, par exemple, l'expression

$$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+4ab+4cd.$$

Le produit de deux formes analogues s'écrira

$$(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)=(uu'+vv')^2+(uv'-vu')^2.$$

Posons

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=uu'+vv',$$
$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=uv'-vu':$$

on tirera de là γ et δ en fonction des deux arbitraires α, β et des quantités connues $a, b, \ldots, a', b', c', d'$. Dès lors, le produit des deux formes

$$2a^2+2b^2+\ldots+4cd,$$
$$2a'^2+2b'^2+\ldots+4c'd'$$

pourra se mettre, d'une double infinité de manières, sous la forme

$$2\alpha^2+2\beta^2+\ldots+4\gamma\delta.$$