NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur un rapprochement remarquable entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, le folium de Descartes et la cardioïde

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 241-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__241_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$M^1 5$] [$M^1 6h$]

SUR UN RAPPROCHEMENT REMARQUABLE ENTRE L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS, LE FOLIUM DE DESCARTES ET LA CARDIOÏDE ;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Considérons un système d'axes de coordonnées xOy et une courbe (Γ) symétrique par rapport à l'axe Ox; son équation est de la forme $f(x, y^2) = 0$. Considérons, d'autre part, la courbe (Γ') d'équation $f(x, -y^2) = 0$. La transformation qui sert à passer de la courbe (Γ) à la courbe (Γ') n'est autre que la transformation affine, caractérisée par les équations

$$(1) \qquad x' = x, \qquad y' = iy;$$

elle fait correspondre à des points imaginaires de (Γ) des points réels de (Γ'), et réciproquement. Les courbes (Γ) et (Γ') étant affines, il existe entre leurs propriétés des relations bien connues. Or, on peut établir, au moyen de cette transformation et d'autres transformations géométriques simples, un rapport entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, certaines trisectrices remarquables, le folium de Descartes et la cardioïde. On pourra ainsi déduire, des propriétés connues de l'hypocycloïde à trois rebroussements, plusieurs théorèmes importants concernant le folium de Descartes et la cardioïde.

2. Soit (H_3) une *hypocycloïde à trois rebroussements* dont le cercle tritangent (C_1) a pour centre O et pour rayon r, et dont un des points de rebroussement est le point $(-3r, o)$. La polaire réciproque de (H_3) par rapport au cercle tritangent

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

est la *trisectrice de G. de Longchamps* (L) ayant pour équation

$$x(x^2 - 3y^2) - r(x^2 + y^2) = o.$$

Si l'on prend la courbe affine de (L), d'après les équations (1), on obtient

$$x(x^2 + 3y^2) - r(x^2 - y^2) = o.$$

Cette équation représente un *folium de Descartes* (F) ayant pour asymptote la droite

$$3x + r = o;$$

l'origine O est le point double et le sommet de la boucle est le point (r, o).

Considérons maintenant la courbe affine de (F), l'axe d'affinité étant l'axe Ox, le rapport d'affinité étant $\sqrt{3} : 1$; on obtient ainsi la *trisectrice de Maclaurin* (M) d'équation

$$x(x^2 + y^2) + \frac{r}{3}(y^2 - 3x^2) = o.$$

Considérons enfin le cercle (γ) de rayon $\frac{1}{3}r$ ayant pour centre le point $O'\left(\frac{2}{3}r, o\right)$. La polaire réciproque de la trisectrice de Maclaurin par rapport à ce cercle est, d'après un théorème de G. de Longchamps [1],

---

(1) *Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioide* (*Prager Ber.*, 1897).

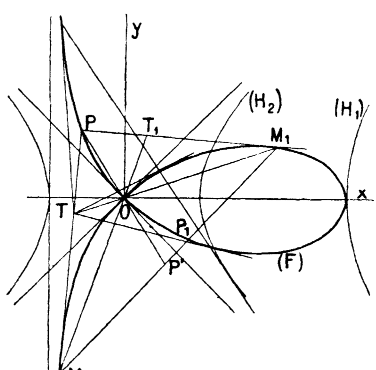
une *cardioïde* (C). Cette cardioïde a pour point de rebroussement le point $\left(\frac{5}{9}r, 0\right)$ et pour sommet le point $(r, 0)$.

Sur le folium de Descartes [1].

3. Comme applications des remarques qui précèdent, nous déduirons quelques propriétés remarquables du folium de Descartes de celles de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Cherchons d'abord quelles sont les coniques obtenues en transformant le cercle tritangent (C_1) et celui des rebroussements (C_2) de (H_3), comme on a transformé l'hypocycloïde pour en déduire le folium de Descartes. Si l'on transforme (C_1) et (C_2) par polaires réciproques par rapport au cercle (C_1), on obtient le

Fig. 1.



cercle (C_1) lui-même et un cercle concentrique de

---

[1] On connaît peu de propriétés de cette courbe (*Voir* Loria-Schutte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 58).

rayon $\frac{1}{3}r$. On voit, par suite, qu'il correspond au folium (F), comme transformées de (C_1) et (C_2), deux hyperboles équilatères (H_1) et (H_2). L'hyperbole (H_1) a pour centre le point double O et pour asymptotes les tangentes nodales du folium; l'un des sommets de l'axe réel de cette hyperbole est le sommet de la boucle. L'hyperbole (H_2) est homothétique de (H_1) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant $1:3$ (*fig.* 1).

4. La tangente en un point d'une hypocycloïde à trois rebroussements coupe la courbe en deux points, qui sont les points *associés* du point considéré; les tangentes en ces points sont rectangulaires, leur intersection appartient au cercle tritangent et le point de ce cercle diamétralement opposé à cette intersection appartient à la première tangente considérée.

Si l'on transforme ce théorème par polaires réciproques, on obtient la propriété suivante de la trisectrice (L) : si, d'un point de la trisectrice, on mène les tangentes à la courbe, autres que celle au point considéré, la corde de contact est vue du point O sous un angle droit et enveloppe le cercle (C_1); cette corde passe par le symétrique par rapport à O du point considéré de la trisectrice.

Passons ensuite au folium de Descartes; remarquons qu'à deux rayons perpendiculaires du cercle (C_1) correspondent, pour une conique affine, deux demi-diamètres conjugués et que, pour une hyperbole équilatère, deux directions conjuguées sont symétriques par rapport aux asymptotes. Nous aurons donc le théorème suivant :

Si deux points M *et* M_1 *d'un folium de Descartes sont tels que les droites qui les joignent au point* *double sont symétriques par rapport aux tangentes nodales, les tangentes en ces points se coupent en un point* P *de la courbe et la corde* MM_1 *enveloppe une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les tangentes nodales; cette corde contient le symétrique* P′ *de* P *par rapport à* O.

On verra plus loin que P′ est le milieu de MM_1.

5. On sait que la développée de l'hypocycloïde (H_3) est une autre hypocycloïde à trois rebroussements homothétique de (H_3) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant 3 : 1. On déduit de là que le lieu des points d'intersection de la tangente en un point de la trisectrice (L) avec la perpendiculaire élevée en O sur la droite qui joint ce dernier point au point considéré de (L) est la courbe homothétique de (L) par rapport à O, le rapport d'homothétie étant 1 : 3. On a, par suite, cette propriété du folium de Descartes :

Le lieu de l'intersection de la tangente en un point M *du folium avec la symétrique de* OM *par rapport aux tangentes nodales est un folium homothétique du folium considéré par rapport à* O, *le rapport d'homothétie étant* 1 : 3.

Appelons T le point où la droite OM_1 rencontre la tangente au folium au point M, T_1 le point où la droite OM rencontre la tangente au folium au point M_1. On a

$$3\,OT = OM_1, \qquad 3\,OT_1 = OM, \qquad PO = OP'$$

et, par suite,

$$MP' = P'M_1, \qquad MP = 3\,TP, \qquad M_1P = 3\,T_1P.$$

On déduit de là ces théorèmes :

Si deux points M *et* M_1 *d'un folium de Descartes sont tels que* OM *et* OM_1 *sont symétriques par rapport aux tangentes nodales, le milieu de* MM_1 *décrit le folium symétrique du folium donné par rapport au point double.*

Si la tangente en un point d'un folium de Descartes recoupe la courbe au point P, *le lieu du point* T *situé au tiers du segment* PM *à partir de* P *est un autre folium de Descartes.*

6. La normale en un point quelconque de l'hypocycloïde recoupe la courbe en trois points, dont deux sont imaginaires; les tangentes en ces trois points concourent sur le cercle des rebroussements (C_2). En transformant cette propriété on voit que si, du point T, on mène au folium les tangentes autres que la tangente MP, les points de contact de ces tangentes appartiennent à une tangente à l'hyperbole (H_2).

Le lieu des points d'où l'on peut mener au folium de Descartes trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires est le folium de Descartes homothétique du folium considéré par rapport au point double, le rapport d'homothétie étant $1:3$.

La droite qui joint les points de contact enveloppe l'hyperbole équilatère (H_2).

7. A trois normales concourantes de l'hypocycloïde correspondent, pour le folium, trois points T collinéaires; il suffit pour cela que les points M_1 correspondants soient collinéaires. Or, on sait que la normale en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements et celles aux points associés concourent en un point du cercle des rebroussements. On déduit de là une pro-

priété qui complète le théorème du paragraphe 4. Si l'on désigne par R le point où la tangente en P au folium recoupe la courbe, le point situé au tiers de PR à partir de R appartient à la droite TT_1. Il résulte de là que, si l'on appelle P_1 le point où le symétrique de OP par rapport aux tangentes nodales recoupe le folium, ce point P_1 appartient à la droite MM_1.

Si d'un point P *du folium on mène deux tangentes* PM, PM_1 *à la courbe, la corde de contact contient le point où le symétrique de* OP *par rapport aux tangentes nodales recoupe la courbe.*

8. *Coniques tritangentes au folium de Descartes.* — On sait que les normales à l'hypocycloïde (H_3) aux points de contact de la courbe avec une conique tritangente sont concourantes. On déduit de là, en tenant compte des remarques qui précèdent, la proposition suivante :

Si M, M′, M″ *sont les points de contact du folium de Descartes avec une conique tritangente, les points* M_1, M'_1, M''_1 *où les symétriques de* OM, OM′, OM″ *par rapport aux tangentes nodales recoupent la courbe sont collinéaires.*

Si les normales en trois points d'une hypocycloïde à trois rebroussements sont concourantes, leurs points associés appartiennent à une conique. On a donc, pour le folium de Descartes, la propriété suivante :

Les tangentes menées de M, M′, M″ *au folium sont tangentes à une conique.*

Nous avons montré [1] que, lorsque le centre d'une

---

[1] *Nouvelles Annales*, octobre 1913.

conique tritangente à une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3) décrit une droite d, cette conique passe par un point fixe qui appartient à la tangente à (H_3) perpendiculaire à d. Par suite, si une telle conique passe par un point fixe, le lieu de son centre se compose de trois droites. Si l'on transforme cette propriété par polaires réciproques, on voit que, si une conique tritangente à la trisectrice (L) reste tangente à une droite fixe, l'enveloppe de la polaire de O par rapport à cette conique se compose de trois points.

Passant ensuite de la courbe (L) à la courbe (F), on a ce théorème :

Si une conique tritangente à un folium de Descartes reste tangente à une droite fixe, l'enveloppe de la polaire du point double par rapport à cette conique se compose de trois points fixes.

Sur la cardioïde.

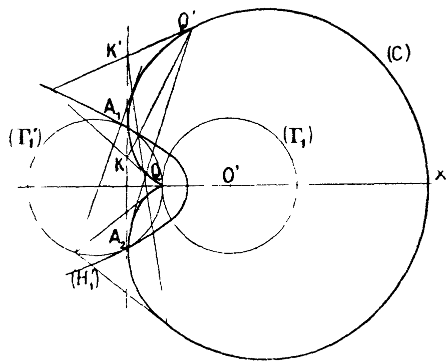
9. En utilisant les propriétés du folium de Descartes que nous venons de déduire de celles de l'hypocycloïde à trois rebroussements, on peut obtenir, au moyen des transformations indiquées au paragraphe 2, des théorèmes intéressants concernant la cardioïde.

Appliquons d'abord aux hyperboles (H_1) et (H_2) les transformations par lesquelles nous avons déduit la cardioïde (C) du folium (F). L'hyperbole affine de (H_1) correspondant à la trisectrice de Maclaurin (M) a pour équation

$$3x^2 - y^2 = 3r^2.$$

On déduit ensuite de là, par un calcul simple, qu'à la cardioïde (C) correspond, comme transformée de (H_1), une autre hyperbole (H'_1). L'un des sommets de l'axe réel de celle-ci est le sommet de la cardioïde (C), l'autre est le point situé au dixième de la distance du point de rebroussement au sommet de (C). L'hyperbole (H_1) passe par les points de contact A_1 et A_2 de la cardioïde avec sa tangente double; les tangentes

Fig. 2.



à (H'_1) en ces points se coupent au foyer singulier O′ de la cardioïde (*fig.* 2).

Considérons de même l'hyperbole (H_2); à la trisectrice de Maclaurin correspond, comme transformée de (H_2), l'hyperbole

$$9x^2 - 3y^2 = r^2. \tag{2}$$

Soit (Γ_1) le cercle de base de la cardioïde considérée comme conchoïde et (Γ'_1) le symétrique de ce cercle par rapport au rebroussement de (C). On montre aisément que, si l'on applique à l'hyperbole (2) la transformation par polaires réciproques qui fait correspondre la cardioïde (C) à la trisectrice (M), on obtient le cercle (Γ'_1).

10. Nous avons considéré (§ 4) les couples de points M, M_1 du folium de Descartes, tels que les droites OM, OM_1 sont symétriques par rapport aux tangentes nodales. A ces deux points M et M_1 correspondent sur la trisectrice (M) deux points μ et μ' tels que $O\mu$ et $O\mu'$ sont conjugués par rapport à l'hyperbole (2). Or, le cercle (Γ'_1), polaire réciproque de cette hyperbole par rapport au cercle (γ), passe par les points A_1 et A_2, et la tangente double A_1A_2 de la cardioïde est la polaire de O par rapport au cercle (γ). On déduit de là qu'aux points M et M_1 du folium de Descartes correspondent deux tangentes de la cardioïde divisant harmoniquement le segment A_1A_2.

Des propriétés du folium de Descartes trouvées au paragraphe 4, découle donc, pour la cardioïde, le théorème suivant :

Une tangente à la cardioïde coupe la courbe en deux points; les tangentes en ces points divisent harmoniquement le segment compris entre les points de contact de la cardioïde avec sa tangente double.

Le lieu de l'intersection de ces tangentes est une hyperbole.

11. Du théorème du paragraphe 6, on déduit ensuite cette propriété :

Le lieu des points d'où l'on peut mener à une cardioïde trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires est le cercle symétrique par rapport au rebroussement du cercle fondamental de la cardioïde considérée comme conchoïde [1].

---

[1] M. G. Loria a donné comme lieu de ce point le cercle fondamental (*Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 155). Ce résultat est inexact; on le montre facilement d'ailleurs en vérifiant les calculs résumés dans cet Ouvrage.

On peut d'ailleurs aisément construire des droites telles que les tangentes en trois de leurs points d'intersection avec la cardioïde soient concourantes. Soit, en effet, Q le point de contact de la cardioïde avec la polaire du point μ par rapport au cercle (γ). Cette polaire coupe la tangente double A_1A_2 en un point K, dont le conjugué harmonique K' par rapport aux points A_1, A_2 est le pôle de la droite $O\mu'$ par rapport au cercle (γ). Par conséquent, la droite QK' est la polaire du point d'intersection τ de $O\mu'$ avec la tangente en μ à la trisectrice (M). Puisque le point τ correspond à T dans la transformation affine par laquelle on déduit (M) de (F), on peut mener de ce point à la trisectrice (M) trois tangentes dont les points de contact sont collinéaires. On a donc le théorème suivant :

Soit K' le conjugué harmonique, par rapport aux points de contact de la cardioïde avec sa tangente double, du point d'intersection K *de cette tangente double avec la tangente en un point quelconque* Q *de la cardioïde. La droite* QK' *recoupe la courbe en trois points; les tangentes en ces points sont concourantes.*

12. Au moyen des considérations qui précèdent on déduit encore du paragraphe 8 les théorèmes suivants :

Les tangentes menées d'un point à la cardioide coupent la tangente double en α, β, γ; *soient* α', β', γ' *les conjugués harmoniques de* α, β, γ *par rapport aux points* A_1 *et* A_2, *et* $\alpha'', \beta'', \gamma''$ *les points de contact des tangentes menées de* α', β', γ' *à la courbe. Les points* $\alpha'', \beta'', \gamma''$ *sont les points de contact d'une co-*

nique tritangente à la cardioïde, et les droites $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$, $\gamma\gamma''$ *sont concourantes.*

En particulier :

Si de deux points K *et* K′ *de la tangente double, conjugués harmoniques par rapport aux points de contact de celle-ci avec la cardioïde, on mène deux tangentes qui touchent la courbe en* Q *et* Q′, *les droites* KQ′ *et* K′Q *se coupent sur le cercle, symétrique par rapport au rebroussement, du cercle fondamental de la cardioïde considérée comme conchoïde.*

Si l'on observe enfin que la polaire de O par rapport au cercle (γ) est la tangente double de la cardioïde, on a ce théorème :

Le lieu des pôles de la tangente double de la cardioïde par rapport aux coniques tritangentes à la courbe passant par un point fixe se compose de trois droites.