NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Détermination du rayon de courbure en un point de certaines courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 230-234

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__230_1>

[O¹2e]

DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT DE CERTAINES COURBES PLANES;

PAR M. R. BOUVAIST.

THÉORÈME. — *Si l'on considère un faisceau linéaire tangentiel de courbes planes* $f + \lambda\varphi = 0$, *les courbes de base* $f = 0$, $\varphi = 0$ *étant de classe* m :

1° *Le point de contact* O *de la courbe du faisceau qui touche une droite donnée* Δ *est l'intersection de* Δ *avec la droite joignant les pôles de* Δ *par rapport aux courbes* $f = 0$, $\varphi = 0$.

2° *Le rayon de courbure* O *de la courbe considérée est donné par la formule*

$$\rho = -(m-1)\frac{\dfrac{1}{\mu_1\mu_2} - \dfrac{1}{\mu'_1\mu'_2}}{\dfrac{1}{y_1} - \dfrac{1}{y_2}},$$

y_1 *et* y_2 *désignant les distances des pôles* P_1 *et* P_2 *de la droite* Δ *par rapport à* $f = 0$ *et* $\varphi = 0$ *à cette droite;* μ_1, μ_2, μ'_1, μ'_2 *les tangentes des angles que font avec* Δ *les tangentes menées de* O *aux coniques polaires de* Δ *par rapport à* $f = 0$, $\varphi = 0$.

1° Les pôles de Δ par rapport aux courbes du faisceau considéré sont sur une droite Δ_1, le point de contact de Δ avec la courbe du faisceau qui lui est tangente étant son pôle par rapport à cette courbe, la proposition est démontrée.

2° Prenons pour origine le point O, pour axes des x et des y la droite Δ et la perpendiculaire à cette droite en O, on voit facilement que le rayon de courbure en O d'une courbe $\psi(u, v, w) = 0$ tangente à Δ en ce point est donné par la formule $\rho = -\frac{v\psi''_{u^2}}{\psi'_w}$.

Ceci posé, nous pouvons écrire l'équation de la courbe $f(u, v, w) = 0$ sous la forme

$$\begin{aligned}
&(u, v, w) \\
&= [A u^m + B u^{m-1} v \\
&\quad + C u^{m-2} v^2 + \ldots + I u^2 v^{m-2} + L u v^{m-1} + K v^m] \\
&\quad + w\ [A_1 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} v + \ldots + L_1 u v^{m-2} + K_1 v^{m-1}] \\
&\quad + w^2 [A_2 u^{m-1} + B_1 u^{m-3} v + \ldots + L_2 u v^{m-3} + K_2 v^{m-2}] \\
&\qquad + w^3 f_{m-3} + \ldots + w^{m-1} f_1 + w^m = 0,
\end{aligned}$$

$f_{m-3}, f_{m-4}, \ldots, f_1$ désignant des polynomes homogènes en u, v de degré égal à l'indice dont ils sont affectés. Nous supposerons l'équation de la courbe $\varphi(u, v, w) = 0$ écrite sous la même forme, les coefficients des différents termes étant A', B', ..., A'_1, B'_1, ...

Les pôles de Δ par rapport à f et φ seront

$$u(f'_u)_0 + v(f'_v)_0 + w(f'_w)_0 = 0,$$
$$u(\varphi'_u)_0 + v(\varphi'_v)^0 + w(\varphi'_w)_0 = 0,$$

où $(f'_u)_0$, $(f'_v)_0$, ... désignent les dérivées correspondantes dans l'expression desquelles on a fait $u = w = 0$, c'est-à-dire

$$L\,u + mK\,v + K_1\,w = 0,$$
$$L'u + mK'v + K'_1\,w = 0;$$

les coniques polaires

$$\begin{gathered}u^2(f''_{u^2})_0 + \quad v^2(f''_{v^2})_0 + \quad w^2(f''_{w^2})_0 \\ + 2uv(f''_{uv})_0 + 2uw(f''_{uw})_0 + 2vw(f''_{vw})_0 = 0, \\ u^2(\varphi''_{u^2})_0 + \quad v^2(\varphi''_{v^2})_0 + \quad w^2(\varphi''_{w^2})_0 \\ + 2uv(\varphi''_{uv})_0 + 2uw(\varphi''_{uw})_0 + 2vw(\varphi''_{vw})_0 = 0\end{gathered}$$

seront de même

$$\begin{gathered}2\mathrm{I}\, u^2 + m(m-1)\mathrm{K}\, v^2 + 2\mathrm{K}_2\, w^2 \\ + 2(m-1)\mathrm{L}\, uv + 2\mathrm{L}\, uw + 2(m-1)\mathrm{K}_1\, vw = 0, \\ 2\mathrm{I}' u^2 + m(m-1)\mathrm{K}' v^2 + 2\mathrm{K}'_2\, w^2 \\ + 2(m-1)\mathrm{L}' uv + 2\mathrm{L}' uw + 2(m-1)\mathrm{K}'_1\, vw = 0.\end{gathered}$$

Nous avons d'autre part, pour expression du rayon de courbure en O,

$$\rho = -\frac{v(f''_{u^2} + \lambda\varphi''_{u^2})}{f'_w + \lambda\varphi'_w} = -\frac{2(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{I}')}{\mathrm{K}_1 + \lambda\mathrm{K}'_1};$$

or la courbe considérée étant tangente en O à Ox, nous aurons

$$\mathrm{K} + \lambda\mathrm{K}' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = -2\frac{\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{K}} - \dfrac{\mathrm{I}'}{\mathrm{K}'}}{\dfrac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}} - \dfrac{\mathrm{K}'_1}{\mathrm{K}'}}.$$

Si l'on remarque maintenant que les ordonnées des pôles de Ox par rapport à $f = 0$, $\varphi = 0$ sont

$$y_1 = \frac{m\mathrm{K}}{\mathrm{K}_1}, \qquad y_2 = \frac{m\mathrm{K}'_1}{\mathrm{K}'}$$

et que les produits des coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine aux coniques polaires de ce point sont

$$\mu_1\mu_2 = m(m-1)\frac{\mathrm{K}}{2\mathrm{I}}, \qquad \mu'_1\mu'_2 = m(m-1)\frac{\mathrm{K}'}{2\mathrm{I}'},$$

nous aurons

$$\rho = -(m-1)\frac{\dfrac{1}{\mu_1\mu_2} - \dfrac{1}{\mu'_1\mu'_2}}{\dfrac{1}{y_1} - \dfrac{1}{y_2}}.$$

Construction de la formule donnée. — Désignons par P_1 et P_2 les pôles de Δ par rapport à $f = 0$, $\varphi = 0$; par p_1 et p_2 les projections de ces points sur Δ; par α_1, β_1, α_2, β_2 les intersections des droites P_1p_1, P_2p_2, avec les tangentes issues de O aux coniques polaires de Δ.

Nous aurons visiblement

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{\overline{Op_1}^2}{p_1\alpha_1 \times p_1\beta_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{\overline{Op_2}^2}{p_2\alpha_2 \times p_2\beta_2},$$

ou en désignant par γ_1 et γ_2 les orthocentres des triangles $O\alpha_1\beta_1$, $O\alpha_2\beta_2$,

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{Op_1}{p_1\gamma_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2\gamma_2}.$$

Menons par O les parallèles à $P_1\gamma_1$, $P_2\gamma_2$ et désignons par P'_1 et P'_2 leurs intersections respectives avec P_1p_1, P_2p_2, nous aurons

$$\frac{1}{\mu_1\mu_2} = \frac{Op_1}{p_1\gamma_1} = \frac{P'_1p_1}{P_1p_1}, \qquad \frac{1}{\mu'_1\mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2\gamma_2} = \frac{P'_2p_2}{P_2p_2},$$

d'où

$$\rho = -(m-1)\frac{P'_1p_1 \times P_2p_2 - P'_2p_2 \times P_1p_1}{P_2p_2 - P_1p_1};$$

sous cette forme on voit immédiatement que la droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ P_1p_1 & P'_1p_1 & 1 \\ P_2p_2 & P'_2p_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coupe Oy en un point C tel que

$$OC = (m-1)\rho.$$

D'où la construction suivante :

Soient O *le point de contact de la courbe considérée avec la droite* Δ, P_1 *le pôle de* Δ *par rapport à l'une des courbes de base du faisceau donné*, p_1 *la projection de* P_1 *sur* Δ, *les tangentes menées de* O *à la conique polaire de* O, *par rapport à la courbe de base considérée, coupent* P_1p_1 *en* α_1 *et* β_1 ; *soit* γ_1 *l'orthocentre du triangle* $O\alpha_1\beta_1$, *la parallèle à* $P_1\gamma_1$ *menée par* O *coupe* P_1p_1 *en* P'_1, *la parallèle à* Δ *menée par* P'_1 *coupe la perpendiculaire à* Δ *en* O *au point* K, *prenons sur* KP'_1 *dans le sens* KP'_1 *un segment* $\overline{KR_1} = \overline{P_1p_1}$ *et construisons de même avec la seconde courbe de base le point* R_2, *la droite* R_1R_2 *coupe* OK *en un point* C *tel que* $OC = (m-1)\rho$, ρ *étant le rayon de courbure cherché.*

Remarque. — La construction précédente s'appliquera immédiatement dans les très nombreux cas où l'équation tangentielle d'une courbe s'écrira

$$P_1P_2\ldots P_n + \lambda Q_1Q_2\ldots Q_n = 0,$$

$P_1P_2\ldots P_n$, $Q_1Q_2\ldots Q_n$ étant des points ou des coniques, différents ou confondus.

En particulier, elle permet de résoudre immédiatement les problèmes suivants :

Construire le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît cinq tangentes.

Une conique touchant les côtés d'un triangle en α, β, γ, *construire le rayon de courbure en l'un de ces points.*