

F. BALITRAND

**Construction du centre de courbure
de la spirale hyperbolique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 223-225

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__223_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M'e] [O'2e]

**CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE
DE LA SPIRALE HYPERBOLIQUE ;**

PAR M. F. BALITRAND.

On trouve dans Serret (*Calcul différentiel et intégral*, 2^e édition, p. 360) la remarque suivante à propos du centre de courbure de la spirale hyperbolique : « La construction du rayon de courbure n'a elle-même aucune difficulté; mais elle n'offre pas assez d'intérêt pour que nous nous arrétions à la développer. » On peut cependant donner de ce rayon plusieurs constructions géométriques, intéressantes à cause de leur simplicité.

Soient O le pôle de la spirale; M un de ses points; N et T les points de rencontre de la perpendiculaire élevée en O, au rayon vecteur OM, avec la normale et la tangente en M à la courbe. L'équation de la spirale étant, en coordonnées polaires,

$$\rho\omega = \alpha,$$

l'expression générale du rayon de courbure,

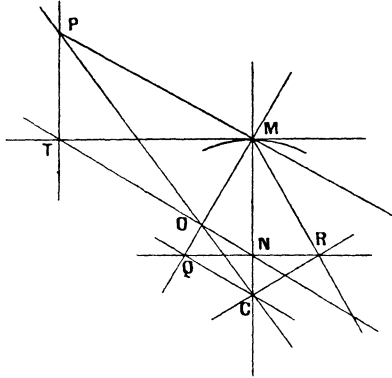
$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho\rho'' - \rho\rho''},$$

donne dans le cas présent

$$R = \frac{\rho(\alpha^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3} = \frac{MN^3}{OM^2} = \frac{MN^3}{ON \times OT}.$$

Cette formule conduit aux constructions géométriques suivantes du centre de courbure C en M :

1° En T on élève une perpendiculaire à la tangente et en M une perpendiculaire au rayon vec-



teur OM; ces deux droites se coupent en P; la droite PO passe par le centre de courbure C.

En effet, les triangles semblables OTP, ONC donnent, puisque $TP = MN$,

$$\frac{NC}{MN} = \frac{ON}{OT},$$

d'où

$$\frac{MC}{MN} = \frac{TN}{OT} = \frac{\overline{MN}^2}{OT \times ON}.$$

Donc MC est bien égal au rayon de courbure R.

2° Par le point N on mène une parallèle à la tangente MT qui coupe le rayon vecteur OM en Q; la perpendiculaire élevée en ce point au rayon vecteur passe par le centre de courbure C.

En effet, les triangles semblables MON, MQC

donnent

$$\frac{MC}{MN} = \frac{MQ}{MO} = \frac{MQ \times MO}{OT \times ON}.$$

Mais le triangle rectangle MNQ donne

$$\overline{MN}^2 = MQ \times MO;$$

donc

$$\frac{MC}{MN} = \frac{\overline{MN}^2}{OT \times ON};$$

ce qui prouve bien que C est le centre de courbure.

3° *En M on mène la symétrique du rayon vecteur par rapport à la normale; la parallèle à la tangente menée par N la coupe en R; la perpendiculaire élevée en R à MR passe au centre de courbure C.*

Le triangle MQR étant isocèle, cette construction ne diffère pas au fond de la précédente.