NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Somme des cubes de *n* nombres en progression arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 193-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__193_0>

[A1c]

SOMME DES CUBES DE n NOMBRES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. J'aurai à utiliser les faits suivants, dont on trouvera plus loin l'historique, et qui deviennent très simples si l'on se borne à un exposé synthétique.

THÉORÈME I. — *Si une progression arithmétique de raison* $2r$, *formée de* a *termes, a pour premier terme*

$$A = a^2 - (a-1)r, \tag{1}$$

son dernier terme est

$$a^2 + (a-1)r,$$

et la somme de ses termes est a^3, *c'est-à-dire le cube du nombre des termes.*

THÉORÈME II. — *Si, en supposant que* r *est un entier positif, on prend dans la progression considérée ci-dessus* $a+r$ *termes à la suite des* a *premiers termes, ces nouveaux termes forment une progression qui est dans les mêmes conditions que la première.*

En effet, le premier terme de la nouvelle progression est $a^2+(a+1)r$; au lieu de $a(a-r)+r$, on a donc $(a+r)a+r$, qui s'en déduit en changeant a en $(a+r)$. On aurait pu dire, bien entendu, que ce premier terme de la nouvelle progression admet l'écriture $(a+r)^2-(a+r-1)r$.

Théorème III. — *Si une progression arithmétique de raison* $2r$ *a pour premier terme*

$$A = a^2 - (a-1)r,$$

a et r étant des entiers positifs, et si l'on y forme des groupes successifs contenant des termes en nombre

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad \ldots, \quad a+(p-1)r, \quad \ldots,$$

la somme des termes de chaque groupe est le cube du nombre des termes contenus dans le groupe, soit

$$a^3, \quad (a+r)^3, \quad (a+2r)^3, \quad \ldots, \quad [a+(p-1)r]^3, \quad \ldots.$$

Cela résulte de ce qui précède.

2. Le cas particulier $a=1$, $r=2$, est bien connu. On partage la suite des nombres impairs en groupes contenant 1, 2, 3, ... termes

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid, \quad \ldots$$

et la somme des p termes du $p^{\text{ième}}$ groupe est égale à p^3. Dans sa *Théorie des nombres* (p. 226), Ed. Lucas attribue cette propriété à Nicomaque de Gérase, qui vivait à la fin du Ier siècle de notre ère.

En 1889, sur une indication d'un de ses élèves, G. Brunet, qui avait considéré la suite

$$1 \mid 5, 9, 13 \mid 17, 21, 25, 29, 33 \mid, \quad \ldots$$

correspondant à $a=1$, $r=4$, M. J. Joffroy donnait dans les *Nouvelles Annales* un résultat presque complet sur lequel je reviendrai dans un instant.

En 1914, M. Haton de la Goupillière, ayant eu connaissance, par une Note parue dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, de la remarque de G. Brunet, publiait dans les *Comptes rendus* de l'Académie la solution de la question suivante qu'il s'était posée :

Si dans une progression arithmétique à termes entiers, on forme des groupes successifs contenant des termes en nombre

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad \ldots,$$

quelle doit être la raison R *de la progression et quel doit être son premier terme* A *pour que, dans chaque groupe, la somme des termes soit le cube d'un entier?*

J'ai remplacé les notations p et q, a et r de M. Haton par les notations plus expressives a et r, A et R.

L'auteur trouve

$$\mathrm{R} = 2r, \qquad \mathrm{A} = a^2 - ar + r.$$

3. M. Joffroy s'était posé une question moins générale, en prenant *a priori* $\mathrm{R} = 2r$, et en faisant commencer la progression par le terme a, c'est-à-dire en prenant $\mathrm{A} = a$. Comme la relation (1) peut s'écrire

$$\mathrm{A} - a = (a-1)(a-r),$$

l'auteur trouvait les deux solutions $a = 1$, $a = r$.

La première est intéressante. On considère la progression

$$1, \quad 1+2r, \quad 1+4r, \quad \ldots,$$

et l'on y forme des groupes où le nombre des termes est successivement

$$1, \quad 1+r, \quad 1+2r, \quad \ldots;$$

les sommes des termes des groupes successifs sont

$$1, \quad (1+r)^3, \quad (1+2r)^3, \quad \ldots.$$

Pour $a = r$, on considère la progression

$$r. \quad 3r, \quad 5r, \quad \ldots,$$

on y forme des groupes où le nombre des termes est successivement

$$r, \quad 2r, \quad 3r, \quad \ldots,$$

et les sommes des termes des groupes successifs sont

$$r^3, \quad 2^3 \times r^3, \quad 3^3 \times r^3, \quad \ldots.$$

On peut dire alors : si, dans la suite

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots,$$

on forme des groupes où le nombre des termes est successivement

$$r, \quad 2r, \quad 3r, \quad \ldots,$$

les sommes des termes des groupes successifs sont

$$(1^3, 2^3, 3^3, \ldots) \times r^2.$$

4. Sans reprendre ici l'analyse de M. Haton, je montrerai comment le calcul fort simple de M. Joffroy conduit assez naturellement à prendre $R = 2r$, et aboutit à la formule (1) quand on ne suppose plus $A = a$. Je rappelle d'abord les formules classiques

$$l' = a' + (n-1)r', \qquad S = \frac{a'+l'}{2}\, n,$$

d'où l'on déduit

$$S = \frac{a' + l'}{2} \times \frac{l' - a' + r'}{r'}, \qquad S = \left[a' + (n-1)\frac{r'}{2}\right]n.$$

Les nombres de termes des groupes successifs étant a, b, c, ..., l, $l + r$, ..., le premier terme du groupe qui contient $l + r$ termes est précédé de termes dont le nombre est

$$\frac{a+l}{2} \times \frac{l-a+r}{r};$$

le premier terme de la progression étant A, *et la raison étant* $2r$, ce terme a pour valeur

$$A + (a + l)(l - a + r);$$

la somme des termes du groupe est donc, d'après la dernière des formules rappelées ci-dessus,

$$[A + (l + a)(l - a + r) + (l + r - 1)r](l + r);$$

si l'on néglige un facteur cubique qui peut être commun à tous les termes de la progression, *comme* $l + r$ *s'exprime linéairement en fonction de son rang dans la progression* a, b, c, ..., il apparaît que la somme en question doit être le cube de $l + r$, c'est-à-dire *le cube du nombre des termes contenus dans le groupe.*

On doit donc avoir

$$A + (l^2 - a^2) + 2lr + ar + r^2 - r = (l + r)^2,$$

ou

$$A = a^2 - (a - 1)r;$$

c'est la formule (1).

II.

5. Si l'on désigne par S_h la somme des puissances d'exposant h des n premiers nombres entiers, on a (STURM, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 387)

$$S_{2k+1} = S_1^2 \times \varphi(S_1),$$
$$S_{2k} = S_2 \times \psi(S_1),$$

φ et ψ étant des fonctions entières à coefficients numériques *rationnels*.

Les formules

$$S_3 = S_1^2, \qquad 5S_4 = S_2 \times (6S_1 - 1)$$

sont connues depuis longtemps; la seconde a été donnée par Djamchid ben Mas'oud qui vivait au XVI^e siècle (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. IV, p. 239). Dostor a donné les expressions des sommes $S_5, \ldots, S_{10}$ (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVIII, p. 513), sans voir toutefois que les polynomes en n qui multiplient S_1^2 et S_2 sont des fonctions de S_1.

La démonstration la plus simple de la formule $S_3 = S_1^2$ consiste à écrire l'identité

$$4p^3 = p^2 \times 4p = p^2[(p+1)^2 - (p-1)^2],$$

d'où

$$p^3 = \left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(p-1)p}{2}\right]^2 = \varphi(p) - \varphi(p-1);$$

on donne à p les valeurs 1, 2, 3, ..., n et l'on ajoute les égalités obtenues. Si l'on observe que $\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2$ est la somme des $\frac{p(p+1)}{2}$ premiers nombres impairs, c'est-à-dire la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre $1 + 2 + \ldots + (p-1) + p$, tandis que $\left[\frac{(p-1)p}{2}\right]^2$ est la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre $1+2+\ldots+(p-1)$, on est conduit à la propriété rappelée au début du n° 2; elle est obtenue de cette façon dans un article de M. Midy (*N. A.*, 1846, p. 640). Inversement, il résulte de cette propriété que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale à la somme des nombres impairs, à partir de 1, en nombre

$$1+2+\ldots+n,$$

et cette somme a pour valeur

$$(1+2+\ldots+n)^2.$$

6. L'extension donnée à la propriété rappelée au début du n° 2 m'a permis d'établir la proposition suivante :

La somme des cubes de n termes consécutifs d'une progression arithmétique est liée à la somme même de ces termes par la formule

$$\begin{aligned}(2)\qquad \Sigma_3 &= \Sigma_1 \times \left[a^2+(n-1)ar+\frac{n(n+1)}{2}r^2\right]\\ &= \Sigma_1 \times [a(a-r)+r\Sigma_1],\end{aligned}$$

a désignant le premier terme et r la raison; s'il s'agit de nombres entiers, on voit que :

La somme des cubes de n nombres entiers en progression arithmétique est divisible par la somme de ces nombres.

L'établissement direct de cette formule, ou même une simple vérification, serait sans doute assez pénible; et l'on ne se rendrait pas compte ainsi du fait arithmétique auquel elle donne lieu pour a et r entiers.

La marche que nous suivrons, outre qu'elle est simple, explique le fait en question.

Soient a et r entiers. Dans la progression

$$A,\quad A+2r,\quad A+4r\quad \ldots,$$

où

$$A = a^2 - (a-1)r,$$

prenons des termes en nombre

$$(3)\quad N = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + [a+(n-1)r];$$

leur somme est

$$(4)\quad S = a^3 + (a+r)^3 + (a+2r)^3 + \ldots + [a+(n-1)r].$$

D'autre part cette somme a pour expression, d'après une formule écrite plus haut,

$$S = [A+(N-1)r]N,$$

ce qui montre déjà que la somme (4) *est divisible par la somme* (3), *pour a et r entiers, et en fait bien comprendre la raison : cette somme* (4) *est la somme des termes d'une progression arithmétique où le nombre des termes est la somme* N.

Comme on a

$$N = \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]n = na + \frac{n(n-1)}{2}r,$$

il vient, en tenant compte de la valeur de A,

$$S = \left[a^2 - (a-1)r + \left(na + \frac{n(n-1)}{2}r - 1\right)r\right] \times N:$$

en supprimant $+r$ et $-r$ dans le crochet, on a la formule (2), pour a et r entiers.

Si l'on considère cette formule en elle-même, comme elle est vraie pour toute valeur entière de a et de r, elle est exacte quels que soient a et r.

On aurait même pu se contenter de démontrer la formule (2) pour $a = 1$ et r entier; dans le résultat obtenu, on aurait remplacé r par $\frac{r}{a}$, a et r étant quelconques. C'est ce que j'avais fait, avant de connaître l'extension donnée par M. Haton au résultat obtenu par M. Joffroy. Mais il y avait intérêt à établir directement le résultat pour le cas où a et r sont des entiers quelconques.

III.

7. Voici quelques remarques sur le théorème III. On peut d'abord, comme l'indique M. Haton, disposer par lignes les groupes de termes de la progression :

a termes,
a termes, *r termes*,
a termes, *r termes*, *r termes*,

et ainsi de suite.

M. Alezais a fait observer (p. 64 du présent Volume) que, si l'on supprime certains groupes au début de la progression, on obtient une solution qui ne doit pas être regardée comme essentiellement différente de celle d'où on l'a déduite; inversement, pour $a > r$, on peut introduire au début de nouveaux groupes contenant des termes en nombre

$$a - r, \quad a - 2r, \quad \ldots;$$

et cette remarque se comprend bien d'après ce qui a été dit au n° 1. On peut dès lors se borner, r étant donné, à prendre pour a les valeurs

$$a = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad r;$$

c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

Comme A s'exprime en fonction de a par un trinome du second degré

$$A = a^2 - ra + r,$$

si l'on donne à a deux valeurs équidistantes de $\frac{r}{2}$, à savoir

$$a = 1 \text{ ou } r - 1, \quad 2 \text{ ou } r - 2, \quad 3 \text{ ou } r - 3, \quad \ldots,$$

on a A pour la même valeur. Une valeur de a ayant donné une progression, on obtient donc la même progression avec un autre groupement des termes, sauf pour $a = r$, et aussi pour $a = r'$ si $r = 2r'$.

Si l'on écrit

$$A - 1 = (a - 1)[a - (r - 1)],$$

on voit d'abord qu'on obtient $A = 1$ en prenant $a = 1$ ou $a = r - 1$; pour $r = 3$, on a les deux groupements

$$\underline{\mathbf{1}}\,|\,\underline{\mathbf{7}},\ \underline{\mathbf{13},\ \mathbf{19},\ \mathbf{25}}\,|,\ \ldots,$$

$$\underline{\mathbf{1},\ \mathbf{7}}\,|\,\underline{\mathbf{13},\ \mathbf{19}},\ \underline{\mathbf{25},\ \mathbf{31},\ \mathbf{37}}\,|,\ \ldots.$$

Pour les valeurs

$$a = 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad r - 3, \quad r - 2,$$

A est négatif ou nul, nul seulement pour

$$r = 4, \qquad a = 2.$$