

R. BRICARD

Au sujet d'une note de M. Fontené

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 171-173

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__171_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[P'4]

AU SUJET D'UNE NOTE DE M. FONTENÉ ;

PAR M. R. BRICARD.

Dans une Note récente (*N. A.*, 1915, p. 515),
M. Fontené a proposé l'étude d'une surface définie de
la manière suivante : Étant donnés six points dans

l'espace, à tout point M correspond un point M' tel que toutes les quadriques du réseau ponctuel déterminé par les six premiers points et par le point M passent aussi, en vertu du théorème de Lamé, par le point M' . M . Fontené observe que les droites MM' forment une congruence, à savoir la congruence des cordes de la cubique gauche (Γ) qui passe par les six points, et que sur toute droite de cette congruence les couples (M, M') sont en involution. La surface dont il s'agit est le lieu des points doubles de ces involutions.

Soient (D) l'une des droites de la congruence dont il s'agit et P un point double de l'involution correspondante. Le point P est tel que toutes les quadriques qui contiennent ce point et les six points donnés sont tangentes en P à (D) , ou ont un point double en P . On peut dire aussi que toutes les quadriques tangentes en P à (D) , ou ayant un point double en P , et passant par cinq des points donnés, passent par le sixième. Ainsi le cône du second degré qui a son sommet en P et qui passe par les cinq premiers points passe par le sixième point. Autrement dit, le point P est sommet d'un cône de second ordre passant par les six points.

Réciproquement, tout point qui est sommet d'un cône du second degré passant par les six points est un point P , car il passe par ce point une corde de la cubique gauche (Γ) et ce point est un point double de l'involution qui a eu lieu sur cette droite.

La surface signalée par M. Fontené n'est donc autre que la surface, lieu des sommets des cônes du second ordre passant par six points donnés. Cette surface est bien connue sous le nom de surface de Weddle. Elle est du quatrième ordre. Elle contient la cubique gauche (Γ) qui passe par les six points, puisqu'un cône ayant son sommet sur la cubique et ayant

la cubique pour directrice est un cône du second degré. Une droite de la congruence est une corde de cette cubique et rencontre encore la surface en deux points P et Q, sommets de deux cônes du second degré passant par les six points, et points doubles de l'involution sur la droite; comme les points d'appui de la droite sur la cubique forment un couple de l'involution, les deux points P et Q forment avec ces deux points d'appui une division harmonique.

La surface de Weddle contient évidemment les quinze droites joignant deux à deux les six points donnés; évidemment aussi, sur chacune de ces droites qui sont des cordes de la cubique gauche (Γ), l'involution (M, M') est illusoire, puisque les quadriques du réseau qui passent par un point de la droite contiennent la droite tout entière.

Il est clair aussi que la surface contient les dix droites dont chacune est l'intersection du plan contenant trois des six points avec le plan contenant les trois autres. Ainsi, *quand on se donne le point M sur une des droites en question, les quadriques du réseau ponctuel déterminé par les six points donnés et par ce point sont tangentes en M à une même droite (D), corde de la cubique gauche (Γ) passant en M; le point M est un point P sur cette droite (D); le point Q, second point double de l'involution sur la droite, est le conjugué du point M par rapport aux points d'appui de la droite sur la cubique.*

L'étude de la surface de Weddle a occupé divers géomètres, parmi lesquels on peut citer Cayley, R. Sturm, Schottky, G. Humbert.