JOSEPH JOFFROY

Solution du problème de Pappus généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 168-171

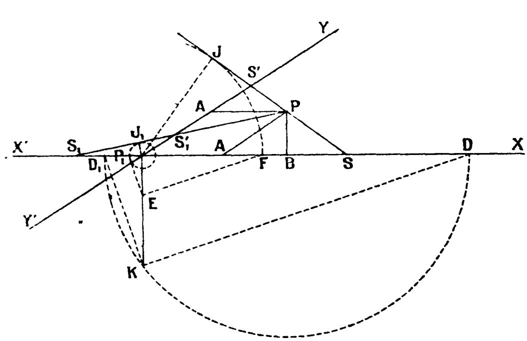
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__168_1>

[K'1]

SOLUTION DU PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire.

Ce problème peut s'énoncer ainsi : dans un angle *quelconque* XOY ou ω inscrire une droite SS' de longueur l donnée et passant par P, point de la bissectrice de ω. Jusqu'à ce jour le cas particulier de ω droit a été seul résolu par l'emploi d'une équation du



deuxième degré. P (*voir* la figure) est déterminé par le losange A'OAP de côté a. Posons $OS = x$, $OS' = y$.

Les triangles semblables OS′S, APS donnent

$$(1) \qquad \frac{y}{a} = \frac{x}{x-a} \qquad \text{ou} \qquad xy = a(x+y).$$

Dans le triangle OSS′, on a

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\omega = l^2$$

ou

$$(2) \qquad (x+y)^2 - 2xy(1+\cos\omega) = l^2.$$

Éliminant xy entre (1) et (2), j'obtiens

$$(\text{E}) \qquad (x+y)^2 - 2a(1+\cos\omega)(x+y) - l^2 = 0,$$

équation du deuxième degré en $x+y$ dont la racine positive, qui convient à mon problème, est

$$x+y = a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2} = \text{A}.$$

J'ai donc

$$x+y+\text{A}$$

et

$$xy = \text{A}a.$$

On sait construire $x+y$ et $\sqrt{xy}$, puis x et y. On calcule x et y qui sont les racines de

$$(\text{E}') \qquad z^2 - \text{A}z + \text{A}a = 0.$$

$x = \text{OS}$ étant connu, la sécante SS′ est déterminée. La sécante symétrique de celle-ci par rapport à la bissectrice est la seconde solution. La valeur absolue de la racine négative de l'équation (E) déterminerait les deux autres droites, solutions, l'une dans l'angle YOX′, l'autre dans XOY′ : on le vérifiera en supposant, comme je l'ai fait, le problème résolu.

Si j'avais éliminé x ou y au lieu de xy ou $x+y$, j'aurais obtenu une équation complète du quatrième degré et j'en aurais conclu que le problème général de

Pappus ne peut pas être résolu *graphiquement :* c'est ce qui a été cru jusqu'à ce jour. Quant aux quatre racines de cette équation du quatrième degré en x ou en y, leurs valeurs sont celles qui satisfont à l'équation (E). En résolvant l'équation du quatrième degré on obtiendrait des expressions égales à celles que j'ai trouvées ci-dessus, mais bien plus compliquées (ce serait un exercice de concours).

Voici une solution de mon problème plus élégante que ma précédente.

Soit $OJ = R$ perpendiculaire à la sécante SS' qu'il s'agit de placer. J'ai encore

$$xy = a(x+y), \qquad (x+y)^2 - 2xy(1+\cos\omega) = l^2.$$

J'ai aussi

$$xy\sin\omega = Rl,$$

double du triangle OSS'.

Éliminant xy et $x+y$ entre ces trois équations, j'obtiens

$$\text{(J)} \qquad lR^2 - 2a^2\sin\omega(1+\cos\omega)R - a^2 l\sin^2\omega = 0,$$

$$R = \frac{a\sin\omega}{M}\left[a(1+\cos\omega) \pm \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right].$$

La valeur positive de R convient pour la construction de SPS'. Sa valeur négative convient pour la construction de la sécante $S_1S'_1P$, solution dans YOX' (on le vérifiera). J'ai donc, si j'appelle R_1 la perpendiculaire OJ_1 à cette sécante

$$R_1 = \frac{a\sin\omega}{l}\left[-a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right],$$

avec

$$R = \frac{a\sin\omega}{l}\left[a(1+\cos\omega) + \sqrt{a^2(1+\cos\omega)^2 + l^2}\right].$$

J'abaisse PB perpendiculaire à OX : j'ai

$$a \sin B = PB = b, \qquad a(1 + \cos\omega) = OB = c,$$

et je puis écrire

$$R = \frac{b}{l}\left[c + \sqrt{c^2 + l^2}\right], \qquad R_1 = \frac{b}{l}\left[-c + \sqrt{c^2 + l^2}\right].$$

On voit que R, R_1 n'exigent que la construction d'un seul triangle rectangle et de deux quatrièmes proportionnelles.

Construction la plus rapide de R, R_1. $OK = l$ est perpendiculaire à OX, BK vaut $\sqrt{c^2 + l^2}$, OD vaut $c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OD_1 vaut $-c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OE égale $PB = b$. EF est parallèle à KD, EF_1 est parallèle à KD_1. La quatrième proportionnelle OF vaut R, la quatrième proportionnelle OF_1 vaut R_1. De O je décris un cercle de rayon R, un cercle de rayon R_1. De P je leur mène les tangentes PJ, PJ_1 et leurs symétriques par rapport à la bissectrice de XOY. Les quatre tangentes sont les quatre solutious du problème de Pappus que j'ai généralisé et résolu grâce à un changement de variable, grâce à une idée bien simple, celle de remplacer $x^2 + y^2$ par $(x + y)^2 - 2xy$!