NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T. HAYASHI

Sur quelques équations cubiques trinômes indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 150-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__150_1>

[I 19c]

SUR QUELQUES ÉQUATIONS CUBIQUES TRINOMES INDÉTERMINÉES ;

PAR M. T. HAYASHI, Sendaï (Japon).

(*Traduit de l'anglais.*)

1. *Équation*

(1) $$x^3 + z(y^2 + z^3) = 0.$$

En supposant z différent de zéro, divisons cette équation par z^3, et écrivons x à la place de $\frac{x}{z}$, et y à celle de $\frac{y}{z}$. Il faut alors montrer que la cubique

(2) $$x^3 + y^2 + 1 = 0$$

ne peut passer par aucun point de cordonnées rationnelles, autre que $(-1, 0)$.

Si elle passe par un tel point, soit

(3) $$y = m(x + 1)$$

l'équation de la droite qui le joint au point $(-1, 0)$; m est alors un nombre rationnel. Éliminant y entre

(2) et (3), nous avons

$$(4) \qquad x^2 - x + 1 + m^3(x+1) = 0$$

ou

$$x^3 + (m^2 - 1)x + (m^2 + 1) = 0,$$

m et x étant des nombres rationnels. Donc le discriminant

$$(m^2 - 1)^2 - 4(m^2 + 1) \quad \text{ou} \quad (m^3 - 3)^2 - 12$$

doit être un carré parfait. Alors $(m^2 - 3)^2 = X^2 + 12$.

Soient

$$m = \frac{\mu}{\nu} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{\xi}{\eta},$$

μ et ν étant des entiers premiers entre eux, de même que ξ et η. Alors

$$(\mu^2 + 3\nu^2)^2\eta^2 = [\xi^2 + 3(2\eta)^2]\nu^4.$$

Donc tout facteur de ν^4 doit être facteur de η^2 et réciproquement; de sorte que $\eta^2 = \nu^4$. De là

$$(\mu^3 - 3\nu^3)^2 = \xi^2 + 3\eta'^2,$$

relation où η' remplace 2η. Mais l'expression quadratique $\xi^2 + 3\eta'^2$ ne peut avoir un diviseur quadratique de la forme $\mu^2 - 3\nu^2$ que si ce dernier est égal à ± 1. Pour que $\mu^2 - 3\nu^2$ puisse devenir égal à ± 1, il faut que $\xi^2 + 3\eta'^2$ devienne égal à 1 et, de là, ξ et η doivent être respectivement égaux à 1 et 0, ce qui est absurde.

On peut voir par une méthode semblable à celle qui précède que la solution de l'équation *Diophantine*

$$z^2 = x^2 + 3y^2$$

est donnée par

$$z = \lambda(a^2 + 3b^2), \qquad x = \lambda(a^2 - 3b^2), \qquad y = \lambda - 2ab.$$

Quand $m = 0$, x dans (4) ne peut pas être un nombre rationnel; et quand $m = \infty$, x dans (3) ou (4) devient -1; et de là, dans (1), $x = -z$ et $y = 0$.

Donc *le produit* $z(y^2 + z^2)$ *ne peut être un cube*, sinon pour $z = 0$, ou bien pour $y = 0$, ce qui donne $x = -z$.

Si dans (1) nous remplaçons x par $-x$ et z par 1, il vient

$$x^3 - 1 = y^2,$$

équation impossible en nombres rationnels; ce résultat se rapproche beaucoup de l'équation étudiée par Gerono, et n'est autre que celui qu'a donné Lebesgue ([1]).

2. *Équation*

$$x^3 + z(y^2 - z^3) = 0. \tag{1}$$

Nous pouvons résoudre cette équation par une méthode semblable. Après la réduction à

$$x^3 + y^3 - 1 = 0, \tag{2}$$

prenons la ligne droite

$$y = m(x - 1), \tag{3}$$

et nous obtenons l'équation

$$x^2 + x + 1 + m^2(x - 1) = 0 \tag{4}$$

ou

$$x^2 + (m^2 + 1)x - (m^2 - 1) = 0,$$

([1]) *Encycl. d. Math. Wiss.*, Bd. I, p. 572. GERONO, *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. IX, p. 469 et 2e série, t. X, p. 204. LEBESGUE, *Ibid.*, 1re série, t. IX, p. 178. Sur ce sujet *voir* aussi DE JONQUIÈRES, *Ibid.*, 2e série, t. XVII, p. 374.

à résoudre en nombres rationnels. De là

$$(m^2+1)^2+4(m^2-1) \quad \text{ou} \quad (m^2+3)^2-12$$

doit être un carré parfait, soit X^2. Alors

$$(m^2+3)^2 = X^2+12.$$

Soient

$$m = \frac{\mu}{\nu}, \qquad X = \frac{\xi}{\eta},$$

où μ et ν sont des entiers premiers entre eux, de même que ξ et η. Il viendra

$$(\mu^2+3\nu^2)^2\eta^2 = [\xi^2+3(2\eta)^2]\nu^4.$$

Comme plus haut nous devons avoir

$$(5) \qquad \eta^2 = \nu^4,$$

d'où

$$(\mu^2-3\nu^2)^2 = \xi^2+3(2\eta)^2.$$

La solution de cette équation est

$$(6) \qquad \xi = \mu^2-3\nu^2, \qquad \eta = \mu\nu.$$

De (5) et (6) on tire $\mu^2\nu^2 = \nu^4$. Mais $\nu \neq 0$. Donc $\mu = \pm\nu$, ou $m = \pm 1$. Par conséquent, les abscisses des points d'intersection de la droite (3) et de la cubique (2) sont données par la relation (4) réduite, $x^2+2x=0$. Donc $x=0$, ou bien $x=-2$. Et, d'après (3), quand $x=0$, $y=\mp 1$; quand $x=-2$, $y=\mp 3$. Quand $m=0$, $y=0$ d'après (3) et $x=1$ d'après (2). Quand $m=\infty$, $z=1$ d'après (3) et $y=0$ d'après (2).

De là, en dehors du point $(1, 0)$, il y a sur la cubique quatre points rationnels $(0, -1)$ $(-2, -3)$ et $(0, +1)$ $(-2, 3)$. Ils tombent sur deux droites $y = \pm(x-1)$. Donc l'équation Diophantine $x^3+z(y^2-z^2)=0$ est impossible, excepté pour

(I)	$x = z,$	$y = 0;$
(II)	$x = 0,$	$y = -z;$
(III)	$x = 0,$	$y = z;$
(IV)	$x = -2z,$	$y = -3z;$
(V)	$x = -2z,$	$y = 3z;$

ou leurs multiples. Donc le produit $z(y^2 - z^2)$ ne peut pas être un cube, à moins que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{\mp 3} = \frac{1}{z}.$$

Si dans (1) nous remplaçons x par $-x$ et z par 1, nous avons l'équation

$$x^3 + 1 = y^2,$$

qui a été traitée déjà par Gerono. Ce dernier a prouvé qu'elle est possible lorsque, et seulement lorsque $x = 2$, $y = \pm 3$ si l'un ou l'autre des nombres x, y est supposé être un nombre premier. Mais nous avons maintenant prouvé *l'impossibilité de l'équation même si cette restriction est écartée.*

Si nous divisons l'équation (1) par y^3, supposé différent de zéro, et si la cubique plane résultante

$$x^3 + z(1 - z^2) = 0$$

est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons alors aussi à l'équation de Gerono

$$(-m)^3 + 1 = X^2.$$

Si dans (1) nous remplaçons y par 1, nous avons l'équation

$$x^3 = z(z^2 - 1).$$

Donc *le produit de trois entiers consécutifs ne peut* *être un cube*, à moins que l'un d'eux soit nul. J'ai déjà démontré ([1]) que quatre fois un nombre polynome, c'est-à-dire *les deux tiers du produit de trois entiers consécutifs ne peuvent former un cube*, comme extension d'un théorème de Legendre ([2]) consistant en ce qu'un nombre triangulaire différent de 1, c'est-à-dire la moitié du produit de deux entiers consécutifs ne peut être un cube.

L'impossibilité que le produit de trois entiers consécutifs soit un cube peut être aussi démontrée de la façon suivante.

Soit $x^3 = z(z^2 - 1)$. Alors, puisque z et $(z^2 - 1)$ sont premiers entre eux, si nous décomposons n en deux facteurs premiers entre eux ξ et η, et si nous posons $z = \xi^3$, nous devons alors avoir $\xi^6 - 1 = \eta^3$, ce qui est impossible, en vertu du théorème de Fermat, si ni ξ ni η n'est nul.

Par le même raisonnement, nous pouvons démontrer que *le produit de trois entiers consécutifs ne peut être la $n^{ième}$ puissance d'un entier*, *n n'étant pas inférieur à* 2.

3. *Produits de deux nombres consécutifs. Nombres triangulaires.* — Il est évident que *le produit de deux entiers consécutifs ne peut être un carré*, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul. Car, si cela était, l'équation $x(x+1) = y^2$ devrait être résolue en nombres entiers. Puisque x et $x+1$ sont premiers entre eux, ils devraient tous deux être des carrés, comme on le voit en décomposant y en deux facteurs ξ et η, premiers entre eux.

([1]) *Nouv. Ann. de Math.*, 4e série, t. X, p. 83.

([2]) *Théorie des nombres*, t. II, p. 11.

Ainsi, posant $x = \eta^2$, nous devons avoir $\xi^2 - 1 = \eta^2$, relation qui est seulement vérifiée par $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$.

Le problème qui consiste à *trouver un nombre triangulaire qui soit un carré*, c'est-à-dire à trouver les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x-1) = 2y^2,$$

se ramène à l'intersection de la courbe $x(x+1) = 2y^2$ et de la droite $y = m(x+1)$, et se réduit à la solution de l'équation $\xi^2 - 1 = 2\eta^2$, en nombre entiers, qui est possible et bien connue.

On peut aussi démontrer aisément que *le produit de deux entiers consécutifs ne peut pas être un cube*. Car, s'il en était ainsi, l'équation $x(x+1) = y^3$ serait résolue en nombres entiers. Puisque x et $x+1$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas l'un et l'autre être des cubes. Donc, décomposant y en deux facteurs premiers entre eux ξ et η, et posant $x = \xi^3$, on doit avoir $\xi^3 + 1 = \eta^3$, relation impossible, en vertu du théorème de Fermat, si ni ξ, ni η n'est nul.

Par le même raisonnement, nous pouvons démontrer que le produit de deux entiers consécutifs quelconques ne peut être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier, n n'étant pas moindre que 2.

Plus généralement, *il n'y a pas deux entiers x et y satisfaisant à l'équation $y^{l+1} = x^m(x^n - 1)$, où $l, m, n \geqq 1$.*

4. *Équation* $x^2y + z(y^2 - z^2) = 0$. — Nous avons démontré que le produit de deux entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers soit nul, et que le produit de trois entiers consécutifs quelconques ne peut être un cube, à moins que l'un de ces entiers soit nul. Nous

nous trouvons ainsi à même de déterminer si le produit de trois entiers consécutifs quelconques peut être un carré. C'est une suite directe de la dernière partie du précédent article. Mais, dans ce but nous traiterons l'équation en nombres entiers

$$(1) \qquad x^2y + z(y^2 + z^2) = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad x^2y + y^2 - 1 = 0,$$

en écrivant respectivement x et y au lieu de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, dans l'hypothèse $z \neq 0$.

Dans la relation (2), x et y étant des nombres rationnels, nous avons à chercher le point d'intersection de la cubique (2) avec la droite

$$(3) \qquad y - 1 = mx,$$

point tel que ses deux coordonnées soient des nombres rationnels. De là nous tirons, par substitution,

$$x(mx + 1) + m(mx + 2) = 0$$

ou

$$(4) \qquad mx^2 + (m^2 + 1)x + 2m = 0.$$

Pour que cette équation quadratique en x soit résoluble en nombres entiers, le discriminant $m^4 - 6m^3 + 1$, ou $(m^2 - 3)^2 - 8$, doit être le carré d'un nombre rationnel, soit X^2. Posant alors comme ci-dessus

$$m = \frac{\mu}{\nu}, \qquad X = \frac{\xi}{\eta},$$

nous avons

$$(\mu^2 - 3\nu^2)^2\eta^2 = [\xi^2 + 2(2\eta)^2]\nu^4.$$

De là $\eta^2 = \nu^4$, et conséquemment

$$(\mu^2 - 3\nu^2)^2 = \xi^2 + 2(2\eta)^2.$$

Mais la forme $\xi^2 + 2\eta'^2$ ne peut avoir un diviseur quadratique de la forme $\mu^2 - 3\nu^2$, à moins que cette dernière expression ne soit égale à ± 1. Pour que $\mu^2 - 3\nu^2$ devienne égal à ± 1, il faut que $\xi^2 + 2(2\eta)^2$ devienne égal à 1, et, de là, ξ et η doivent être respectivement égaux à 1 et 0, ce qui est absurde.

De là, à moins qu'on ait $m = 0$ ou $m = \infty$, résulte que le déterminant de l'équation (4) ne peut être le carré d'un nombre rationnel.

Lorsque $m = 0$, $y = 1$, d'après (3) et $x = 0$, d'après (2) et (4). De là, dans l'équation (1) $x = 0$, $y = z$. Lorsque $m = \infty$, $x = 0$, d'après (3) et (4), et $y = \pm 1$, d'après (2); de là, dans l'équation (1), $x = 0$, $y = \pm z$. Donc l'équation (1) est impossible en nombres entiers, à moins que $z = 0$, ou bien $x = 0$, $y = \pm z$.

Si nous divisons l'équation (1) par y^2, supposé différent de zéro, et si la cubique plane résultante

$$x^2 + z(1 - z^2) = 0$$

est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons à l'équation suivante à résoudre en nombres rationnels, ce qui est impossible :

$$m^4 + 4 = X^2.$$

Si dans (1) nous remplaçons y par 1, nous avons l'équation $x^2 = z(z^2 - 1)$. De là *le produit de trois entiers consécutifs ne peut être un carré*, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul.

5. *Produits de quatre entiers consécutifs.* — Nous avons établi que le produit de deux ou trois entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul.

Le produit de quatre entiers consécutifs quelcon-

ques ne peut non plus être, ni un carré, ni un cube.

Pour le démontrer, nous emploierons, d'après Lucas, l'identité

$$a(a+r)(a+2r)(a+3r)+r^4=(a^2+3ar+r^2)^2.$$

Soit $r=1$; alors

$$(1) \qquad a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2.$$

Supposons que $a(a+1)(a+2)(a+3)$ soit un carré, non nul.

La différence des carrés de deux nombres consécutifs, sauf $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$ ne peut être en valeur absolue inférieure à 3. Pour $(0, \pm 1)$ la différence est -1, ce qui ne s'applique pas à notre cas. Pour $(\pm 1, 0)$ nous devons avoir

$$a^2+3a+1=\pm 1,$$

ou

$$a=0,\ -1,\ -2,\ -3.$$

Donc le produit en question ne peut être un carré à moins que l'un des quatre entiers ne soit nul [1].

Si, dans (1), $a(a+1)(a+2)(a+3)$ est un cube, nous avons l'équation de Gerono citée plus haut $x^3+1=y^2$, qui est vérifiée seulement par l'une ou l'autre des solutions

$$x=0, \quad y=\pm 1 \qquad \text{ou} \qquad x=2, \quad y=\pm 3.$$

Donc nous devons avoir

$$a^2+3a+1=\pm 1 \qquad \text{ou} \qquad a=0,\ -1,\ -2,\ -3,$$

---

[1] E. Lucas, *Théorie des nombres*, p. 53.

ou bien

$$a^2 + 3a + 1 = \pm 3,$$

ce qui est impossible pour toute valeur entière de a.

Donc le produit $a(a+1)(a+2)(a+3)$ ne peut être un cube que si l'un des quatre entiers est nul.

Gerono démontre en outre que l'équation

$$x^m + 1 = y^n$$

est possible en entiers positifs lorsque, et seulement lorsque, on a

$$m = 3, \qquad x = 2, \qquad n = 2, \qquad y = 3,$$

si x ou y est supposé être un nombre premier. Nous pouvons démontrer par le même raisonnement que lorsque a est choisi de telle sorte que $a^2 + 3a + 1$ soit un nombre premier, le produit $a(a+1)(a+2)(a+3)$ ne peut être une puissance quelconque d'un entier, alors que nous avons montré plus haut que ce produit ne peut être ni un carré ni un cube pour aucune valeur de a.

J'ai établi que le produit de deux, trois ou quatre entiers consécutifs quelconques ne peut être ni un carré, ni un cube, à moins que l'un de ces entiers ne soit nul. Ainsi se présente naturellement la question que voici : *Le produit d'un nombre quelconque d'entiers consécutifs peut-il être un carré ou un cube? Et si cela peut être, pour quels entiers?*

J'ai aussi trouvé que le produit de deux entiers consécutifs ne peut pas être un carré, que celui de trois ne peut pas être un cube, et que celui de quatre ne peut être un carré, et par conséquent n'est pas la quatrième puissance d'un entier. Et cette nouvelle question se présente aussi naturellement : *Le produit* *de n entiers consécutifs quelconques peut-il être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier?*

Ces questions semblent être très intéressantes quand on les rapproche du théorème de Liouville en vertu duquel le produit d'entiers consécutifs

$$m(m-1)(m+2)\ldots(m+n-1)$$

ne peut être une puissance exacte *si dans la suite des facteurs se rencontre un nombre premier* [1].

6. *Équation* $x^2y+z(y^2+z^2)=0$. — Au n° 4 ci-dessus, j'ai étudié l'équation $x^2y+z(y^2-z^2)=0$, et je suis maintenant amené à traiter de la suivante

$$(1) \qquad x^2y+z(y^2+z^2)=0,$$

ce qui ne peut se faire par les mêmes moyens.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad x^2y+y^2z+z^3=0,$$

et nous y pouvons supposer que x, y, z ne sont pas tous nuls et n'ont pas de facteur commun.

Soient u, v, w les plus grands communs diviseurs de (y, z), (z, x), (x, y), respectivement. Nous pouvons poser

$$x=vwx', \qquad y=wuy', \qquad z=uvz'.$$

Substituant ces valeurs de x, y, z dans l'équation (2), nous avons

$$(3) \qquad vw^3x'^2y'+w^2u^2y'^2z'+u^2v^2z'^3=0.$$

---

[1] LIOUVILLE, *Sur le produit* $m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$ (*Journal de Math.*, t. II, 1857, p. 277). Consulter aussi une Note de MOREAU (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, 1872, p. 172) d'après laquelle le théorème est dû à Mathieu (question 441 des *Nouvelles Annales*).

On voit que le premier terme $vw^3x'^2y'$ doit être divisible par u^2. Mais u n'a pas de facteur commun avec v, w et x', de sorte que y' est divisible par u^2. En outre, le dernier terme $u^2v^2z'^3$ est divisible par y'. Mais y' n'a pas de facteur commun avec v et z', de sorte que u^2 est divisible par y'. De là

$$(4) \qquad y' = \pm u^2.$$

Substituant cette valeur de y' dans l'équation (3), nous avons

$$(5) \qquad \pm vw^3x'^2 + w^2u^4z' + v^2z'^3 = 0.$$

Le dernier terme $v^2z'^3$ doit être divisible par w^2; mais w n'a pas de diviseur commun avec v, ni avec z', de sorte que

$$(6) \qquad w = \pm 1.$$

Substituant cette valeur de w dans l'équation (5), nous avons

$$(7) \qquad \pm vx'^2 + u^4z' + vz'^2 = 0.$$

Le terme du milieu u^4z' doit être divisible par v; mais v n'a pas de diviseur commun avec u, de sorte que z' doit être divisible par v. En outre le premier terme $\pm vx'^2$ doit être divisible par z'. Mais z' et x' sont premiers entre eux, de sorte que v doit être divisible par z'. De là

$$(8) \qquad z' = \pm v.$$

Substituant cette valeur de z' dans l'équation (7), nous avons

$$\pm x'^2 \pm (u^4 + v^4) = 0;$$

d'où

$$(9) \qquad x'^2 = u^4 + v^4;$$

et les signes, dans les relations (4), (6), (8), doivent être combinés comme il suit :

$$(+\ +\ -),\quad (+\ -\ +),\quad (-\ +\ +),\quad (-\ -\ -).$$

Ainsi la question est ramenée à la résolution de l'équation (7), qui n'a d'autre solution que $u = 0$, $v = 0$ et $x' = 0$, ce qui s'accorde avec les conclusions de B. Frenicle de Bessy [1].

Donc l'équation (1) n'a de solution que si l'une au moins des quantités x, y, z est nulle.

Si nous divisons l'équation (1) par y^3, supposée non nulle, et si la cubique plane résultante $x^2 + z(1+z^2) = 0$ est coupée par la droite $x = mz$, nous arrivons alors à la résolution en nombres rationnels de l'équation $m^4 - 4 = X^3$, qui est impossible.

7. *Équations* $x^3 = yz(y+z)$, $x^2y + y^2z + z^2x = 0$. — Je m'occuperai maintenant de l'équation

$$(1) \qquad x^3 = yz(y+z).$$

On peut la traiter d'une façon spéciale comme il suit. Supposant z différent de zéro, divisons par z^3, et remplaçons $\frac{x}{z}$ par x et $\frac{y}{z}$ par y. Alors

$$(2) \qquad x^3 = y(y+1),$$

x et y étant ici des nombres rationnels, tandis que x, y et z dans (1) sont des entiers.

De même que ci-dessus, considérant (2) comme l'équation d'une cubique, le point $(0, -1)$ tombe sur

---

[1] *Encycl. des Sc. math. pures et appl.*, t. I, vol. III, p. 36. Pour plus de détails, *voir* B. Frenicle de Bessy, *Traité des triangles rectangles en nombres*, p. 1676.

cette courbe. Nous prendrons alors la ligne droite

$$y + 1 = mx, \tag{3}$$

et nous chercherons les points d'intersection de la droite et de la cubique dont les coordonnées sont des nombres rationnels. Éliminant y entre (2) et (3), il vient

$$x^2 = m^2 x - m.$$

Pour que cette équation quadratique en x soit vérifiée par des valeurs rationnelles de m et de x, il faut que son déterminant

$$m^4 - 4m \tag{4}$$

soit le carré d'un nombre rationnel. Cependant, cela ne peut être, comme nous allons le voir.

Le professeur Hurwitz ([1]) a montré que les deux équations

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$$

et

$$x^{m^2-mn+n^2} + y^{m^2-mn+n^2} + z^{m^2-mn+n^2} = 0$$

sont l'une et l'autre à la fois, ou résolubles, ou non résolubles en entiers différents de zéro.

Si nous particularisons en posant $m = 2$, $n = 1$, nous voyons que la première équation

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x = 0 \tag{5}$$

est insoluble, car la dernière

$$x^3 + y^3 + z^2 = 0$$

l'est elle-même en vertu du théorème de Fermat. Essayons maintenant de résoudre l'équation (5) par la méthode que nous venons d'employer souvent ici-même.

([1]) *Math. Ann.* Bd LXV, 1908, p. 428

Supposant z différent de zéro, divisons par z^3 et remplaçons $\frac{x}{z}$ par x, et $\frac{y}{z}$ par y; nous avons alors

$$(6) \qquad x^2y + y^2 + x = 0,$$

x et y étant maintenant des nombres rationnels, tandis que x, y, z dans (5) sont tous des entiers.

Considérant (6) comme l'équation d'une cubique, le point (o, o) tombe sur cette courbe. Prenons la droite

$$(7) \qquad y = mx$$

et essayons de trouver les points d'intersection à coordonnées rationnelles de cette droite et de la cubique. Éliminant y entre (6) et (7), nous avons

$$mx^2 + m^2x + 1 = 0,$$

équation quadratique en x dont le discriminant $m^4 - 4m$ doit être le carré d'un nombre rationnel. Mais cela ne peut être; car autrement l'équation (5) deviendrait résoluble, ce qui est absurde. Ce discriminant n'est autre que le discriminant (4). Donc l'équation (2) est insoluble en nombres rationnels, et par suite l'équation (1) est insoluble en nombres entiers, si l'une au moins des inconnues n'est pas nulle.

Ed. Lucas (¹) a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(8) \qquad x^3 + y^3 - Az^3 = 0$$

soit résoluble en nombres entiers est que A appartienne à la forme $ab(a+b)$ préalablement débarrassée de

(¹) *Nouv. Ann. de Math.*, 2ᵉ série, t. XVII, 1878, p. 425.

ses facteurs cubiques, c'est-à-dire qu'on ait

$$(9) \qquad Ac^3 = ab(a+b),$$

a, b, c étant des entiers.

Posons $A = 1$; alors (8) n'est pas résoluble, de sorte que la relation $c^3 = ab(a+b)$, qui n'est autre que (1), est impossible en nombres entiers.

Ainsi l'équation (1) est impossible. Remplaçons z par $y+1$; elle devient alors

$$y(y+1)(2y+1) = x^3 \quad \text{ou} \quad 6\frac{y(y+1)(2y+1)}{6} = x^3$$

En employant le raisonnement par lequel nous avons démontré ci-dessus que le produit de deux ou de trois entiers consécutifs quelconques ne peut pas être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier ($n \geqq 2$), nous pouvons démontrer l'impossibilité de l'équation

$$y(y+1)(2y+1) = x^3$$

en nombres entiers, et aussi l'impossibilité de l'équation

$$y(y+1)(2y+1) = x^n \qquad (n \geqq 2),$$

en nombres entiers, puisque deux quelconques des trois nombres y, $y+1$, $2y+1$ sont premiers entre eux.

De là, *le sextuple de la somme des carrés des n premiers nombres entiers ne peut être la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un entier*.

D'après le théorème de Lucas cité plus haut, la relation

$$(10) \qquad 3c^3 = ab(a+b)$$

ne peut être vérifiée, puisque l'équation

$$x^3 + y^3 - 3z^3 = 0$$

est impossible. Si dans (10) nous posons $b = a + 1$, nous avons

$$3c^3 = a(a+1)(2a+1).$$

De là, *le triple de la somme des carrés des m premiers nombres entiers ne peut être la n^{ieme} puissance d'un entier* $(n \geqq 2)$.

On sait que la somme des cubes des m premiers nombres entiers est égale au carré $\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$. Mais elle n'est pas un cube, puisque $\frac{m(m+1)}{2}$ n'en est pas un, d'après la démonstration de Legendre.

8. *Équation* $x^3 = z(x^2 \pm y^2)$. — Nous pouvons traiter quelques autres équations cubiques trinomes indéterminées et homogènes par les méthodes appliquées ici. Les équations étudiées ci-dessus sont toutes impossibles en général. Les suivantes sont au contraire possibles :

$$(1) \qquad x^3 = z(x^2 \pm y^2).$$

En effet, comme dans ce qui précède, prenant la droite $y = m(x-1)$ et la cubique $x^3 = x^2 \pm y^2$, nous avons

$$x^2 = \pm m^2(x-1);$$

de sorte que $x - 1$ ou $1 - x$ doit être un carré.

Si $x - 1$ est un carré a^2 (a rationnel), on a

$$x = 1 + a^2, \qquad m = \pm \frac{1+a^2}{a}, \qquad y = \pm \frac{a^2(1+a^2)}{a}.$$

De là, remplaçant a par $\frac{\alpha}{\beta}$, nous trouvons pour x, y, z, dans l'équation (1), avec le signe $+$,

$$x = \beta(\beta^2 + \alpha^2), \qquad y = \alpha(\beta^2 + \alpha^2), \qquad z = \beta^3.$$

Un résultat semblable se présente dans le cas où $1 - x$ est un carré.

Si dans l'équation (1) on prend le signe —, les valeurs de x, y, z sont respectivement

$$x = \beta(\beta^2 - \alpha^2), \qquad y = \alpha(\beta^2 - \alpha^2), \qquad z = \beta^3.$$