

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16 (1916), p. 137-147

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__137_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Attraction newtonienne des ellipsoïdes homogènes.*
Cas de l'ellipsoïde de révolution aplati.

Deuxième question. — *On considère un ellipsoïde de révolution FAIBLEMENT APLATI. Montrer que cet ellipsoïde supposé homogène attire les points situés à sa surface avec une force dont l'intensité varie A TRÈS PEU PRÈS comme le sinus carré de la latitude (angle de la normale avec le plan de l'équateur).*

En déduire le parallèle sur lequel l'attraction est sensiblement la même que si toute la masse de l'ellipsoïde était concentrée sur son centre et faire voir que la sphère concentrique à l'ellipsoïde et dont la surface contient ce parallèle a un volume sensiblement égal au volume de l'ellipsoïde.

Troisième question. — *Un système S de n points matériels forme un système semblable à un système solide S_0 de n points matériels qui est connu; le système S est soumis*

aux forces mutuelles qui sollicitent ses différents points envisagés deux à deux; former les équations du mouvement du système S autour de son centre de gravité O; on adoptera comme axes de coordonnées les droites menées par O qui sont dans S les homologues respectives des axes principaux d'inertie du solide S_0 par rapport à son centre de gravité G_0 .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Première question. — Trois surfaces sphériques concentriques S_1, S_2, S_3 de rayons décroissants R_1, R_2, R_3 portent des charges électriques uniformément réparties sur chacune d'elles et dont les valeurs respectives sont Q_1, Q_2, Q_3 . La fonction potentielle V due à ce système de charges prend les valeurs respectives

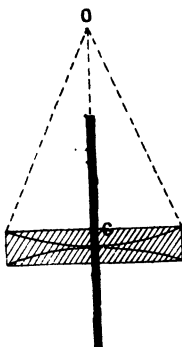
$$V_1 = V_0 \quad \text{sur} \quad S_1,$$

$$V_2 = V_0 \quad \text{sur} \quad S_2,$$

$$V_3 = 0 \quad \text{sur} \quad S_3.$$

Calculer les charges Q_1, Q_2, Q_3 et les densités superficielles correspondantes. Répartition des valeurs de V dans l'espace.

Deuxième question. — Un pendule oscillant et éprouvant une résistance proportionnelle à sa vitesse angulaire bat



la seconde par chacune de ses oscillations simples; on a observé que l'amplitude de ses petites vibrations est réduite de moitié en 1 heure.

Le pendule pèse γ^{kg} ; son centre de gravité est à une distance de l'axe de suspension égale à 1^{m} .

1° On demande en kilogrammètres la valeur du moment résistant rapporté à la vitesse angulaire 1;

2° On demande la valeur du moment résistant lorsque le pendule traverse sa position d'équilibre, la valeur de la semi-amplitude de son oscillation en cours étant alors de 1° .
(Juillet 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Mouvement d'un point matériel pesant suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable enroulé sur une poulie verticale fixe.*

Cas des petites oscillations.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une force appliquée à un point matériel libre, de masse m , mobile dans un plan, a pour composantes parallèles aux axes de coordonnées*

$$X = -m\omega^2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right],$$

$$Y = -m\omega^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right],$$

où

$$\varphi \equiv x^2 + 2hxy + 3y^2,$$

$$\psi \equiv 3x^2 + 2h'xy + y^2$$

(x, y , coordonnées cartésiennes du mobile).

On demande :

1° La condition d'inégalité qui lie les coefficients h et h' , pour que le mouvement étudié résulte de la composition de mouvements vibratoires simples;

2° Les périodes de ces derniers mouvements.

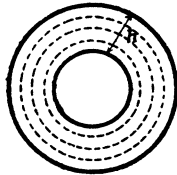
(Novembre 1913.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — 1° *Mouvement d'un point pesant sur une surface de révolution dont l'axe est vertical, le point matériel de masse m étant (en plus de son poids et d'une réaction normale à la surface) soumis à une résistance $K^2 mV$, proportionnelle à sa vitesse V et en sens inverse de la direction de sa vitesse.*

2° *Cas où la surface serait un tore à axe vertical.*

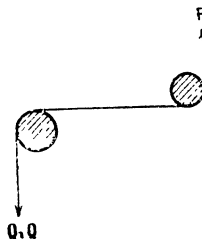
Deuxième question. — 1° Une pression normale uniformément répartie sur une surface fermée RIGIDE laisse la surface en équilibre; établir ce théorème d'Archimède.

2° En considérant deux surfaces FERMÉES PARALLÈLES et distantes de h , on appliquera la proposition précédente à



chacune d'elles; si alors on suppose que ces surfaces possèdent les lois régulières de la courbure, on demande d'exprimer que l'équilibre de deux systèmes de pressions uniformément réparties sur le bloc rigide des deux surfaces est, comme il est évident, indépendant de h . Soient R et R' les deux rayons de courbure principaux de la surface en un point; en déduire qu'une pression normale répartie sur une surface fermée et supposée : soit proportionnelle à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, soit proportionnelle à $\frac{1}{RR'}$, laisse encore cette surface en équilibre.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un fil dont les brins rectilignes sont horizontaux ou verticaux est tiré en haut par un effort P de 10^{kg} et en bas par une force inconnue; le fil



s'appuie sur deux rouleaux dont le coefficient de frottement pour le fil est $0,15$.

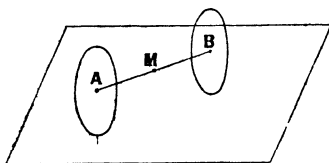
Calculer :

- a. Le poids Q qui fait démarrer l'appareil vers le bas;
 b. Le poids Q_1 qui peut être soulevé par la charge ascendante P ;
 c. Le rapport $\frac{Q_1 - Q}{P}$. (Juin 1914.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Aux deux extrémités d'une tige homogène AB de masse m sont attachés deux disques homogènes identiques de masse m' pouvant librement tourner autour de AB qui est leur axe commun. Au milieu de AB est attaché un point matériel de masse M .

Le système, qui n'est soumis à aucune force extérieure,



est lancé sur un plan horizontal sur lequel le disque B peut librement glisser et rouler tandis que le disque A ne peut que rouler et pivoter.

Trouver le mouvement du point matériel M lorsqu'on suppose que les masses m et m' de la tige et des disques tendent simultanément vers zéro, de façon que leur rapport tende vers une limite.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère le solide homogène et de densité 1 qui, rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$, est limité par les quatre surfaces

$$x^2 = z, \quad y = +1, \quad y = -1, \quad z = +1.$$

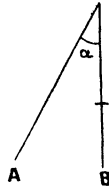
Ce solide étant au repos, on applique, en un point M de la portion parabolique de sa surface limite et normalement à cette surface, une percussion dont la composante suivant Oz a une valeur donnée k .

Calculer la force vive donnée au solide par cette répercussion. Déterminer la position M_1 du point M pour laquelle

cette force vive est aussi grande que possible et la position M_2 pour laquelle elle est aussi petite que possible.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide S est constitué par une tige homogène AB pliée en son milieu, de façon à consti-*

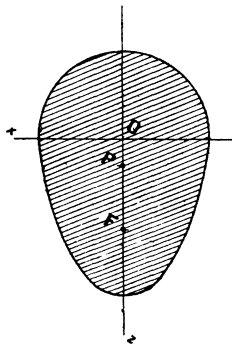


tuer un angle constant α . Les deux extrémités A, B reposent sans frottement sur un plan horizontal fixe.

1° *Supposant $\alpha = 90^\circ$, étudier et discuter le mouvement du solide S soumis uniquement à la pesanteur;*

2° *α étant quelconque, mais supposant que la ligne AB soit assujettie à rester parallèle à une droite qui tourne dans le plan horizontal avec une vitesse angulaire constante donnée ω , étudier et discuter le mouvement du solide S soumis uniquement à la pesanteur.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un solide de révolu-*



tion homogène et pesant dont la méridienne est constituée

par deux arcs des paraboles

$$4x^2 = 4 - z, \quad x^2 = z + 1$$

et dont la densité est l'unité.

Ce solide est fixé par un point P de son axe de révolution Oz. Quel que soit le point P choisi, on part toujours de la même position initiale dans laquelle l'axe Oz, dans le sens indiqué sur la figure, fait un angle de 60° avec la verticale descendante, et de la même rotation initiale, portée sur Oz, et dont la valeur numérique est

$$\sqrt{42(1 + \sqrt{3})}g,$$

g étant l'intensité de la pesanteur.

L'angle θ de Oz avec la verticale subit des oscillations périodiques dont l'amplitude varie avec le point choisi.

Déterminer numériquement à $\frac{1}{10}$ près le z d'un point F sur Oz de telle sorte que l'amplitude des oscillations de θ soit la même, que le point fixe P soit en O ou en F.

(Novembre 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Deux plans rectangulaires tournent avec une vitesse constante et donnée ω autour de leur intersection qui est fixe et verticale.

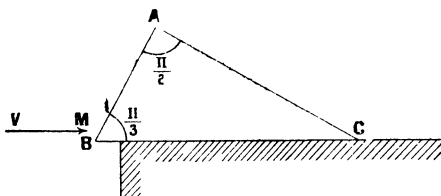
Mouvement d'une tige homogène et pesante dont les extrémités sont assujetties à glisser respectivement sur ces deux plans sans frottement et sans pouvoir les quitter.

Discussion générale.

Effectuer la discussion complète et détaillée en s'attachant surtout à l'étude du mouvement relatif de la barre pour un observateur subissant la rotation ω et en supposant qu'à l'instant initial la rotation absolue de la tige autour de son centre de gravité est nulle. Dédire de cette discussion les différentes formes que présente la trajectoire relative de la projection horizontale du centre de gravité.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Dans un plan vertical, un triangle rectangle matériel peut librement glisser par son hypoténuse sur une horizontale fixe et se trouve primitivement en repos. Un point matériel M mobile dans le même plan

vertical arrive à rencontrer le côté BA avec une vitesse horizontale V et en un point extrêmement voisin de B.



Étudier complètement les différentes périodes du mouvement ultérieur du système constitué par le point et le triangle.

Les masses du point M et du triangle sont toutes deux égales à l'unité. La vitesse V est égale à $\frac{7}{\sqrt{3}}$. L'angle B du triangle rectangle est $\frac{\pi}{3}$ et la longueur BC a pour valeur

$$\frac{98}{45g\sqrt{3}},$$

g étant l'intensité de la pesanteur. Tous les chocs qui peuvent se produire sont des chocs inélastiques.

Trouver la valeur numérique de la vitesse relative du point par rapport au triangle dans la période finale.

(Juin 1913.)

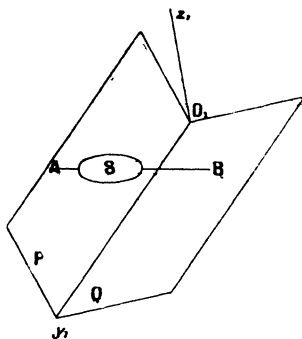
ÉPREUVE THÉORIQUE. — O_1y_1 et O_1z_1 sont deux droites fixes rectangulaires : l'une O_1y_1 est horizontale et l'autre O_1z_1 n'est pas verticale. P et Q sont deux plans fixes passant par O_1y_1 .

S est un solide homogène pesant et de révolution dont l'axe, matériellement prolongé des deux côtés, est limité aux deux points A et B.

Ce solide S est soumis à l'ensemble des liaisons suivantes :

- 1° L'extrémité A se meut sans frottement dans le plan P et ne peut le quitter;
- 2° L'extrémité B se meut, dans les mêmes conditions, dans le plan Q;

3° L'axe de révolution de S est assujéti à faire un angle constant donné α avec la direction fixe $O_1 z_1$.



Discuter le mouvement du solide. Étudier la trajectoire du centre de gravité et le mouvement autour du centre de gravité.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un solide est constitué par trois tiges concourantes rectangulaires homogènes OA, OB, OC de densité linéaire égale à l'unité et dont les longueurs sont $OA = 1^m$, $OB = 2^m$, $OC = 3^m$.

La vitesse initiale du solide se compose d'une translation, égale à l'unité et parallèle à OA, et d'une rotation issue de O et représentée par la diagonale du parallélépipède construit sur OA, OB, OC.

Calculer numériquement la force vive initiale du solide.

(Novembre 1913.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Une manivelle OA homogène et rectiligne, fixée par son extrémité O, est assujétié à tourner dans un plan vertical sous l'action de son poids P et d'une force horizontale T, appliquée à son extrémité A :

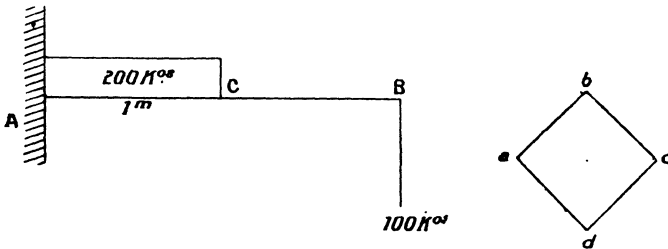
1° On suppose d'abord que le mouvement de la manivelle est uniforme. Calculer l'expression de la force T en fonction de l'angle θ que fait OA avec l'horizontale. Calculer les projections de la réaction du point O sur l'horizontale.

zontale et la verticale, et la valeur de la réaction elle-même. Quand θ varie de 0 à 2π , déterminer les positions de la manivelle pour lesquelles la réaction est soit maximum, soit minimum.

2° On ne suppose plus le mouvement uniforme, mais on suppose $T = Q \sin \theta$ (Q désignant une force constante donnée). Former l'équation qui détermine le mouvement de la manivelle et intégrer autant que possible.

II. Étudier la chute libre dans le vide d'un cylindre plein homogène qui, au début du mouvement, tourne autour de la verticale du centre de gravité. On suppose qu'à ce moment-là l'axe du cylindre fait un angle de 45° avec la verticale, et l'on suppose le diamètre du cylindre égal à sa hauteur.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une poutre encastrée AB porte en B un poids de 100 kg et de A en C ($AC = CB = 1\text{ m}$) une charge uniforme de 200 kg :



1° Construire le diagramme des moments fléchissants.

2° La section uniforme de la poutre est un carré abcd de 8 cm de côté. Déterminer les efforts moléculaires normaux dans la section C.

(Juin 1914.)

ÉPREUVE THEORIQUE. — Une plaque carrée, homogène et pesante, a l'un de ses côtés assujetti à rester constamment dans un plan horizontal fixe. On suppose cette liaison réalisée sans frottement :

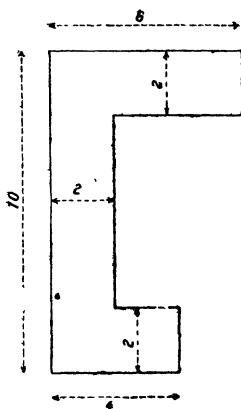
1° Former et intégrer autant que possible les équations du mouvement de la plaque en la supposant simplement soumise à l'action de la pesanteur.

2° Étudier le mouvement avec les conditions initiales suivantes :

Au début du mouvement, la plaque est verticale. Son centre de gravité est animé d'une vitesse normale au plan de la plaque et égale à V . Enfin, l'un des côtés verticaux de la plaque est animé de vitesses nulles. On supposera que ce côté est celui qui, parcouru de bas en haut, est dextrorsum par rapport au vecteur V . La plaque est au-dessus du plan horizontal de liaison.

3° Calculer les réactions, et notamment les réactions initiales.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère le profil dont le croquis est ci-dessous :



Construire, par la construction usuelle de la statique graphique, le centre de gravité du profil.

Calculer le moment d'inertie par rapport à la parallèle aux ailes menée par le centre de gravité, en ramenant ce calcul à celui d'une intégrale curviligne. L'équation du contour d'intégration sera obtenue par des mesures directes sur la figure. (Novembre 1914.)