NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Une question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 134-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__134_0>

UNE QUESTION DE LICENCE ;

Par un abonné.

Les axes étant rectangulaires, on donne la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

En un point (x, y) *de la parabole on mène la tangente, et une droite* D *symétrique de la tangente, par rapport à la parallèle à l'axe* OX *qui passe par* M.

1° *Déterminer les coordonnées du point* M′ *où la droite* D *rencontre la parabole.*

2° *Déterminer les coordonnées du point* C, *milieu de* MM′, *et trouver le lieu du point* C, *quand le point* M *décrit la parabole.*

3° *Trouver l'enveloppe d'une droite* CN, *passant par* C *et parallèle à la tangente en* M *à la parabole.*

4° N *étant le point de contact de la droite* CN *avec son enveloppe, démontrer que la droite* NM *passe par le sommet* O *de la parabole.*

(Montpellier, juin 1913.)

(*Nouvelles Annales*, 1915, p. 39.)

La droite D est la corde commune à la parabole et à son cercle osculateur en M.

Soit T le point de rencontre des tangentes en M et M′ à la parabole.

Désignons par M_1 le symétrique du point M par rapport à l'axe de la parabole. La tangente à cette courbe en M_1 est parallèle à la corde commune MM'. De plus, d'après un théorème bien connu, la droite TC passe en M_1 et a son milieu en ce point.

Si donc on appelle μ, μ' et γ les projections sur OX des points M, M' et C et si N_1 est le point de rencontre, situé sur l'axe, des tangentes à la parabole en M et M_1, on voit que

$$(1) \qquad C\gamma = M\mu, \qquad M'\mu' = 3\,M\mu;$$

ce qui donne les ordonnées des points C et M' en fonction de celle de M.

On a ensuite, puisque dans la parabole la soustangente est double de l'abscisse du point de contact, $O\mu = ON_1$. Appelons P le point où la droite D rencontre l'axe OX, nous aurons

$$\mu P = \mu N_1 = 2\,O\mu;$$

d'où l'on déduit sans peine, pour les abscisses des points C et M',

$$(2) \qquad O\gamma = 5\,O\mu, \qquad O\mu' = 9\,O\mu.$$

Des formules (1) et (2) il résulte que le lieu du point C est une parabole de même sommet et de même axe que la parabole donnée et de paramètre cinq fois plus petit.

Désignons par C_1 et C_2 les points où la droite CN rencontre l'axe et la tangente au sommet de la parabole. Élevons en C_2 une perpendiculaire à CN et soit φ le point où elle rencontre OX; je dis que ce point est fixe.

En effet, menons en M la normale à la parabole. Elle est perpendiculaire à CN et rencontre OX en Q. Les deux triangles MN_1Q, $C_1C_2\varphi$ sont semblables et l'on a

$$\frac{O\varphi}{\mu Q} = \frac{OC_1}{\mu N_1} = \frac{7.O\mu}{2.O\mu} = \frac{7}{2}.$$

Mais μQ n'est autre que la sous-normale, c'est-à-dire le paramètre p. Donc le point φ est fixe et l'enveloppe de CN est une parabole ayant ce point pour foyer et Oy pour tangente au sommet ; autrement dit, une parabole homothétique à la proposée; le centre d'homothétie étant le sommet O et le rapport d'homothétie -7.

Les droites CN et MN_1 étant deux tangentes parallèles de ces paraboles homothétiques, leurs points de contact sont en ligne droite avec le centre O ; par suite, le point N se trouve sur la droite OM.

On peut ajouter que le lieu du point T et l'enveloppe de la droite MM' sont également deux paraboles. D'ailleurs ces deux courbes sont polaires réciproques par rapport à la parabole donnée.

En ce qui concerne le point T, il est symétrique du point M par rapport au point N_1. Ses coordonnées sont $-3O\mu$, $-M\mu$. Il décrit donc une parabole homothétique inverse de la proposée par rapport au sommet O avec un rapport d'homothétie égal à $-\frac{1}{3}$. La tangente en T à cette courbe est la droite PT, en vertu de la propriété fondamentale de la sous-tangente à la parabole.

Soit R le point où D rencontre la tangente au sommet. La perpendiculaire à D en ce point coupe OX en f. Les deux triangles RfP, $C_1C_2\varphi$ sont semblables et donnent

$$\frac{Of}{O\varphi} = \frac{OP}{OC_1} = \frac{3}{7}.$$

Comme $O\varphi_1 = \frac{7}{2}p$, on a

$$Of = \frac{3}{2}p.$$

Le point f est fixe et l'enveloppe de D est une parabole ayant ce point pour foyer et O pour sommet. Comme elle est homothétique de la parabole donnée par rapport à O et que D est parallèle à la tangente M_1N_1, le point où D touche son enveloppe est sur la droite OM_1.