NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur la détermination des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure en un point d'une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 121-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__121_1>

[L^3 11 a]

SUR LA DÉTERMINATION DES AXES DE L'INDICATRICE ET DES RAYONS DE COURBURE EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner une solution du problème suivant :

Étant donnés une surface de second ordre Σ

admettant pour directions principales Ox, Oy, Oz; *un plan* π *tangent à cette surface au point* M, *déterminer les axes de l'indicatrice et les rayons de courbure en* M.

Soit MN la normale à Σ en M; le cône du second ordre ayant pour sommet M, et pour directrice la cubique aux pieds des normales menées à Σ par un point quelconque P de MN, a pour polaire réciproque, par rapport à Σ, une parabole (S) inscrite dans le triangle ABC, A, B, C étant les traces sur π des axes Ox, Oy, Oz de Σ. Le cône considéré étant capable d'une infinité de trièdres trirectangles est coupé par le plan π, suivant deux génératrices rectangulaires MR et MS, la cubique aux pieds des normales étant d'autre part le lieu des points α tels que la droite $P\alpha$ est perpendiculaire au plan polaire de α par rapport à Σ; les deux droites MR et MS sont conjuguées par rapport à Σ, c'est-à-dire sont les bissectrices des génératrices d'intersection de π et de Σ, ou enfin les axes de l'indicatrice en M. Ces axes sont donc les tangentes menées par M à la parabole (S) inscrite dans le triangle ABC et ayant pour directrice MO_1, O_1 étant la projection du centre O de Σ sur π, projection qui est l'orthocentre de ABC.

La parabole (S) est tangente à la droite Δ conjuguée de MN par rapport à Σ. Déterminons cette droite, ce sera par exemple l'intersection de π avec le plan polaire de la trace N_1 de la normale MN sur le plan principal OAB par rapport à Σ.

Si M_1 est la projection de M sur OAB, M_1 et AB sont pôle et polaire par rapport à la conique (E) section de Σ par OAB; la droite M_1N_1 est, de plus, perpendiculaire à AB. L'intersection I de Δ et de AB sera donc le pôle de M_1N_1 par rapport à (E), ou encore le point de contact de AB avec la parabole de Chasles (p) de M_1 par rapport à (E). Cette parabole (p) ayant pour directrice OM_1 et étant tangente à OA et OB, si I_1 est le point d'intersection de AB avec la perpendiculaire OI_1 à OM_1, les points I et I_1 seront symétriques par rapport au milieu μ de AB.

Projetons orthogonalement la figure sur le plan π; on voit que le point I_1 sera le correspondant du point γ d'intersection de CM avec AB dans une involution dont le point central sera le pied H, de la hauteur CO_1H du triangle ABC et dont deux couples de points correspondants sont les points A et B; ce sera donc l'intersection de AB avec la perpendiculaire abaissée de C sur $O_1\gamma$.

Si maintenant nous prenons pour axes les droites MR et MS et la normale MN, l'équation tangentielle de Σ sera

$$au^2 + a'v^2 + 2cus + 2c'vs + 2c''ws + s^2 = 0;$$

la droite Δ conjuguée de MN par rapport à Σ aura pour équation $\frac{cx}{a} + \frac{c'y}{a'} - 1 = 0$, les rayons de courbure à Σ en M ont, d'autre part, pour valeurs $R_1 = -\frac{a}{c''}$, $R_2 = -\frac{a'}{c''}$; si l'on remarque maintenant que c, c', c'' sont les coordonnées du centre O de Σ par rapport aux axes MRSN, on est amené à la solution suivante du problème considéré :

Soient π *le plan tangent en un point* M *d'une quadrique* Σ *de centre* O; MN *la normale à cette surface;* A, B, C *les traces sur* π *des axes de* Σ : *les tangentes menées par* M *à la parabole inscrite dans le triangle* ABC *et admettant pour directrice la* *droite* MO_1, O_1 *étant la projection de* O *sur* π, *sont les axes de l'indicatrice en* M.

Les droites AM, BM, CM *coupent* BC, CA, AB *en* α, β, γ; *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur* $O_1\alpha$, $O_1\beta$, $O_1\gamma$ *coupent* BC, CA, AB *en trois points* I_1, I_2, I_3, *qui sont sur une droite* Δ_1; *la droite* Δ, *isotomique de* Δ_1 *par rapport à* ABC, *coupe les axes de l'indicatrice en* R *et* S. *Si* O_2 *et* O_3 *sont les projections de* O *sur les plans* RMN, RSN, *les perpendiculaires abaissées de* R *et* S *sur les droites* MO_2, MO_3 *coupent* MN *en deux points* C'_1 *et* C'_2 *qui sont les symétriques des centres de courbure en* M *par rapport au plan* π.

Remarque. — Signalons la curieuse propriété suivante dont la démonstration se trouve dans la solution précédente, mais qu'il est facile de démontrer directement en se basant sur les propriétés les plus simples de la correspondance homographique :

Soient H *l'orthocentre d'un triangle* ABC, M *un point du plan de ce triangle;* AM, BM, CM *coupent* BC, CA, AB *en* α, β, γ; *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur* $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ *rencontrent* BC, CA, AB *en* I_1, I_2, I_3. *Ces trois points sont sur une droite* Δ *perpendiculaire à* MH. *Si* M *décrit une droite* Hx, *l'isotomique de* Δ *par rapport à* ABC *enveloppe la parabole inscrite dans* ABC *qui admet pour directrice* Hx.

Si l'on remarque que la droite Δ n'est autre que la polaire du point M par rapport au cercle conjugué au triangle ABC, on voit facilement que la propriété précédente s'étend sans difficulté au tétraèdre orthocentrique.

Remarque. — 1° Si N_1 est la trace sur le plan principal OAB de Σ de la normale MN, on voit facilement que la parabole (S) du plan π envisagée plus haut est la section par le plan π du cylindre parabolique de génératrices perpendiculaires à OAB ayant pour directrice la parabole de Chasles de N_1 par rapport à la section principale de Σ située dans le plan OAB.

D'où la propriété suivante :

Si N_2 *est la trace sur un plan principal de la quadrique* Σ *de la normale en un point* M *de cette surface, si* M_1 *est la projection de* M *sur le plan principal considéré* (P) *de* M, *les tangentes menées par* M_1 *à la parabole de Chasles de* N_1 *par rapport à la section principale de* Σ *située dans* (P) *sont les projections sur* (P) *des axes de l'indicatrice en* M.

2° R et S désignent, comme plus haut, les points d'intersection de la droite Δ conjuguée de la normale MN par rapport à Σ; on voit que le pôle du plan SMN par rapport à Σ est le point R; comme RM est perpendiculaire à SMN, R appartient à la cubique aux pieds des normales de M par rapport à Σ; la polaire réciproque par rapport à Σ du cône de sommet R ayant pour base cette cubique sera la parabole (p) du plan SMN, tangente à MN et à MS en S et inscrite au triangle ayant pour sommet les traces sur SMN des directions principales de Σ. Or la construction du centre de courbure de Σ correspondant à l'axe MS de l'indicatrice montre que ce point est le contact avec MN de la parabole de directrice MO_3, O_3 étant la projection du centre O de Σ sur SMN, tangente à MS en S ; nous pouvons donc énoncer la propriété suivante, dont on trouvera une autre démonstration dans les *Œuvres de Laguerre* :

Soient OA *et* OB *deux des axes d'une quadrique* Σ, M *un point de cette quadrique, la parabole tangente à* OA *et* OB, *et aux projections sur* OAB *de la normale en* M *à* Σ, *et d'un des axes de l'indicatrice en* M_1 *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure principal de* Σ *en* M *qui correspond à l'axe de l'indicatrice considéré.*

3° De ce qui précède on peut aussi conclure que :

Si l'on considère un plan SMN *passant par la normale à une quadrique* Σ *en* M *et par l'un des axes* MS *de l'indicatrice en* M, *la parabole située dans ce plan inscrite au triangle ayant pour sommets les traces des axes de* Σ *sur ce plan et admettant pour directrice la droite* MO_3, O_3 *étant la projection du centre* O *de* Σ *sur* SMN, *touche la normale* MN *au centre de courbure principal correspondant à l'axe* MS *de l'indicatrice, et l'axe* MN *au pôle par rapport à* Σ *du plan* RMN, *passant par la normale* MN *et le second axe* RM *de l'indicatrice.*

Ce qui nous conduit immédiatement au théorème suivant, dû à Salmon (*Géométrie analytique à trois dimensions*, p. 197) :

Les centres de courbure principaux d'une quadrique Σ *en un point* M *sont les pôles du plan tangent à* Σ *en* M, *par rapport aux quadriques homofocales à* Σ *passant par* M.