

F. BALITRAND

**Note sur la néphroïde de Proctor**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1915), p. 97-105

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1915\\_4\\_15\\_\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__97_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M' 8a]

## NOTE SUR LA NÉPHROÏDE DE PROCTOR;

PAR M. F. BALITRAND.

La *néphroïde de Proctor* est la courbe engendrée par un point d'un cercle de rayon  $\frac{a}{2}$  roulant extérieurement sur un cercle de rayon  $a$ . C'est une épicycloïde qui présente deux points de rebroussement aux extrémités d'un diamètre du cercle fixe et deux sommets, dans une direction perpendiculaire, sur un cercle concentrique de rayon  $2a$ . Elle est susceptible de nombreux modes de génération simples, soit ponctuels, soit tangentiels; ces derniers particulièrement remarquables. Nous en indiquerons plusieurs dans ce qui suit.

Prenons un cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ . Soient  $AA'$  un de ses diamètres, fixe par hypothèse, et  $M$  un point variable de sa circonférence. Traçons le cercle qui lui est tangent extérieurement en  $M$  et de rayon  $\frac{a}{2}$ . Soit  $\omega$  son centre. Prenons sur lui un point  $P$  tel que  $\text{arc } MP = \text{arc } MA$ . Le lieu du point  $P$ , quand le point  $M$  varie, est la néphroïde de Proctor.

Abaissons de  $M$  la perpendiculaire  $MQ$  sur  $AA'$ . Puisque  $\text{arc } MA = \text{arc } MP$  et puisque le rayon de  $\omega$  est la moitié de celui de  $O$ ,  $MP$  et  $MQ$  sont égaux. Pour la même raison, si l'on mène la tangente commune en  $M$  aux deux cercles, qui coupe  $AA'$  en  $T$ , les angles  $QMT$  et  $PMT$  sont égaux. Par suite, la tangente  $MT$  est perpendiculaire sur  $PQ$  en son milieu. Donc :

*Si d'un point M d'un cercle, on abaisse la perpendiculaire MQ sur un de ses diamètres fixe AA', et si l'on prend le symétrique P, de Q, par rapport à la tangente en M, le lieu de P, quand M varie sur le cercle, est une néphroïde ayant pour points de rebroussement A et A'.*

De plus, la tangente en P à la néphroïde est la droite PT. En effet, le triangle TPQ étant isocèle, la droite TP rencontre OM en un point  $M_1$ , tel que  $MM_1 = OM$ . Autrement dit, le point  $M_1$  est le point diamétralement opposé à M sur le cercle  $\omega$ . Par suite, TP est perpendiculaire à PM. Mais M étant le centre instantané de rotation, la droite PM est la normale en P; par suite, TP est la tangente. On peut ajouter que cette tangente fait avec AA' un angle double de MOA et, par conséquent, TM est la bissectrice de l'angle PTQ.

Puisque  $MP = MQ$ , le point M appartient à une parabole ayant P pour foyer et AA' pour directrice. La tangente en M à cette parabole, qui est perpendiculaire sur PQ, coïncide avec MT. Donc :

*Le lieu des foyers des paraboles tangentes à un cercle et ayant, comme directrice commune, un diamètre fixe de ce cercle, est une néphroïde ayant pour points de rebroussement les extrémités du diamètre fixe.*

Traçons le cercle de centre M et de rayon MQ. Il touche AA' en Q et la néphroïde en P. La droite PQ prolongée rencontre le diamètre BB', perpendiculaire à AA', en  $Q_1$  et l'on a  $QQ_1 = OM = a$ . L'enveloppe de PQ est donc une hypocycloïde à quatre rebrousse-

ments ou astroïde, ayant ses points de rebroussement en A, A', B et B'. Par suite :

*L'enveloppe d'un cercle, dont le centre décrit un cercle donné, et qui reste tangent à un diamètre de ce cercle, est une néphroïde. La droite qui joint les points de contact sur le diamètre et sur la néphroïde enveloppe une astroïde.*

On peut encore dire, si l'on veut, que :

*Le lieu des points équidistants d'une néphroïde et de sa ligne des rebroussements est le cercle décrit sur le segment de droite, qui joint les points de rebroussement, comme diamètre.*

Désignons par  $\varphi$  l'angle MOA. Nous savons que la tangente PT fait avec AA' un angle égal à  $2\varphi$ ; c'est-à-dire que TP et TA sont symétriques par rapport à TM. D'où le mode de génération suivant de la néphroïde :

*De chaque point T d'un diamètre fixe AA' d'un cercle, on mène la tangente TM à ce cercle et l'on prend la symétrique TP de AA' par rapport à cette tangente. L'enveloppe de TP est une néphroïde.*

Le triangle OTM<sub>1</sub> est isocèle, puisque T appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base OM<sub>1</sub>. L'angle en M<sub>1</sub> est donc égal à MOA, c'est-à-dire à  $\varphi$ . Menons par M<sub>1</sub> une parallèle M<sub>1</sub>N à AA', faisant par suite avec OM<sub>1</sub> le même angle  $\varphi$ . Le lieu de M<sub>1</sub> étant un cercle de centre O et de rayon  $2a$ ; on voit que si NM<sub>1</sub> est un rayon lumineux, M<sub>1</sub>T est le rayon réfléchi par ce cercle. D'où ce théorème :

*La caustique par réflexion d'un cercle, pour des*

*rayons lumineux parallèles, est une néphroïde de Proctor.*

Joignons PM. Dans le triangle rectangle  $PMM_1$ , l'angle en M est égal à  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . D'autre part, dans le triangle OMQ, l'angle OMQ est aussi égal à  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Autrement dit, si QM est un rayon lumineux, PM prolongé est le rayon réfléchi par le cercle fixe. L'enveloppe de PM est donc une néphroïde. Mais PM, nous le savons, est la normale en P à la néphroïde lieu de ce point; son enveloppe est donc la développée de cette néphroïde. Ainsi :

*La développée d'une néphroïde de Proctor est une autre néphroïde concentrique à la première. On l'obtient en prenant l'homothétique de celle-ci; le pôle d'homothétie étant le centre commun et le rapport d'homothétie  $\frac{1}{2}$ , et en la faisant ensuite tourner de  $90^\circ$  autour du centre commun.*

La construction, bien connue, qui donne le point de contact du rayon réfléchi avec son enveloppe, fournit ici le centre de courbure de la néphroïde. On l'obtient en projetant sur MP le milieu du rayon OM. Nous l'obtiendrons plus loin par une autre méthode.

Projetons le point A en R sur MT et prenons le symétrique S de A par rapport à R. Ce point se trouve sur PT. Le lieu du point R étant, d'après une propriété classique, une cardioïde, il en est de même de celui du point S. D'ailleurs, l'égalité des deux triangles OMQ, MPM<sub>1</sub> montre que le cercle de centre M<sub>1</sub>, tangent extérieurement en M au cercle O, passe par S. Comme  $\text{arc MS} = \text{arc MA}$ , il en résulte que le lieu du point S

est celui d'un point d'un cercle de rayon  $a$ , roulant extérieurement sur un cercle égal; ce qui prouve d'une autre façon que ce lieu est une cardioïde. La normale en  $S$  à cette cardioïde est la droite  $SM$ , puisque  $M$  est le centre instantané de rotation. Cette droite est d'ailleurs bissectrice de l'angle  $ASP$ , car les angles  $ASM$  et  $MSP$  sont tous deux égaux à  $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ . Donc :

*La néphroïde de Proctor est la caustique par réflexion de la cardioïde pour des rayons lumineux issus du point de rebroussement de cette dernière.*

$PM$  prolongé rencontre le cercle  $O$  en un second point  $P_1$ . Nous avons vu que  $MO$  est la bissectrice de l'angle  $QMP_1$ ; par suite,

$$MP_1 = 2MQ \quad \text{et} \quad \text{arc } MP_1 = 2 \text{ arc } MA.$$

Comme, d'après ce qui précède, la droite  $MP_1$  enveloppe une néphroïde, on a pour cette courbe le mode de génération suivant :

*Si deux mobiles partant d'un même point se meuvent sur un cercle, dans le même sens, avec des vitesses dans le rapport de 3 à 1, la droite qui les joint enveloppe une néphroïde de Proctor.*

De là, on peut déduire une construction du centre de courbure de la néphroïde. En effet, soit  $M'P'_1$  une nouvelle position de la droite  $MP_1$ , coupant la première au point  $C$ . Les deux triangles  $MCM'$  et  $P_1CP'_1$  sont semblables comme équiangles et, par hypothèse, on a

$$MM' = \frac{1}{3} P_1 P'_1.$$

Donc

$$CM = \frac{1}{3} CP_1 = \frac{1}{4} MP_1.$$

Ainsi, à la limite, lorsque  $M'P'$  se rapproche indéfiniment de  $MP_1$ , le point C, qui devient le point de contact de  $MP_1$  avec son enveloppe, s'obtient en prenant

$$MC = \frac{1}{4} MP_1.$$

Comme ce point est le centre de courbure de la néphroïde, puisque  $MP_1$  est normale en P à cette courbe, on a la construction géométrique suivante :

*Le centre de courbure en un point de la néphroïde s'obtient en projetant sur la normale en ce point le milieu du rayon correspondant du cercle fixe.*

Soit  $\omega_1$  le milieu de  $OM$ . Décrivons un cercle sur  $\omega_1M$  comme diamètre; il passe en C. Décrivons de même le cercle de centre O et de rayon  $O\omega_1$ ; il est tangent au précédent en  $\omega_1$ . Il coupe le diamètre  $BB'$ , perpendiculaire à  $AA'$ , en deux points  $B_1$  et  $B'_1$ . Les deux angles  $CM\omega_1$  et  $B_1O\omega_1$  sont égaux tous les deux à  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Il en résulte que les deux arcs  $C\omega_1$  et  $B_1\omega_1$  sont égaux; car ils sont comptés sur des cercles de rayons  $\frac{a}{4}$  et  $\frac{a}{2}$ . Donc le lieu du point C se confond avec le lieu décrit par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un cercle de rayon double; ce lieu est donc une néphroïde; ce qui prouve, comme nous Favons déjà vu, que la développée d'une néphroïde est une autre néphroïde.

*Rectification et quadrature.* — La rectification et la quadrature de la néphroïde peuvent s'obtenir géométriquement de plusieurs façons. Celle que nous allons indiquer est basée sur la remarque suivante.

Le cercle décrit sur OM comme diamètre passe en Q et comme MQ = MP, on a aussi

$$\text{arcMQ} = \text{arcMP} = \text{arcMA}.$$

Donc le point Q est fixe sur le cercle de diamètre OM, et si l'on fait rouler celui-ci intérieurement sur le cercle O, il engendre le diamètre AA'; c'est le théorème de Cardan.

D'autre part, si l'on fait rouler une courbe mobile sur une courbe fixe, d'abord sur la convexité, puis sur la concavité de celle-ci, de sorte que les mêmes points de la courbe mobile coïncident avec les mêmes points de la courbe fixe dans les deux mouvements, on a les deux formules suivantes :

$$d\sigma = \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) r ds, \quad d\sigma_1 = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) r ds,$$

où  $ds$  désigne l'élément d'arc commun aux deux courbes au point de contact;  $\rho$  et  $\rho_1$  les rayons de courbure des mêmes courbes en ce point;  $r$  le rayon vecteur du point décrivant;  $d\sigma$  et  $d\sigma_1$  les éléments d'arc des deux roulettes.

Ces formules sont bien connues. D'ailleurs, leur démonstration est immédiate, si l'on remplace les deux courbes, fixe et mobile, par des polygones infinitésimaux inscrits.

Dans le cas présent, où les courbes fixe et mobile sont deux cercles,  $\rho$  et  $\rho_1$  sont constants et égaux respectivement à  $\frac{a}{2}$  et  $a$ ;  $r$  désigne MP.

Pour le roulement extérieur (néphroïde), on a donc

$$d\sigma = \frac{3 \cdot \text{MP}}{a} ds;$$



pour le roulement intérieur (diamètre  $AA'$ ),

$$d\sigma_1 = \frac{MP}{a} ds;$$

d'où

$$d\sigma = 3 d\sigma_1.$$

En intégrant, on voit que l'arc de néphroïde  $AP$  est égal à  $3.AQ$ . D'où ce théorème :

*La longueur d'un arc de néphroïde, compté à partir du point de rebroussement, est égale à trois fois la distance de ce point de rebroussement à la projection, sur le diamètre des rebroussements, du point correspondant du cercle fixe.*

La longueur totale de la néphroïde est égale à  $12a$ . La quadrature s'obtient par des considérations analogues. En faisant rouler une courbe mobile, d'abord sur la convexité, puis sur la concavité d'une courbe fixe, le rayon vecteur du point décrivant balaye chaque fois une aire limitée par l'arc de la courbe fixe, l'arc de la roulette et les deux lignes droites qui joignent les premières et dernières extrémités de ces arcs. Chacune de ces aires se décompose en quadrilatères mixtilignes infinitésimaux dont chacun comprend : 1° un petit secteur curviligne qui a pour sommet le point décrivant et pour base l'élément de la courbe mobile; 2° un second secteur qui a son sommet au point de contact des deux courbes et pour base l'élément de la roulette.

Les premiers sont évidemment égaux dans les deux roulements. Quant aux seconds, ils ont pour expression

$$d\Sigma = \frac{1}{2} r d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) r^2 ds,$$

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2} r d\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) r^2 ds,$$

suivant que les convexités des deux courbes, fixe et mobile, sont opposées ou non.

Dans le cas présent, où celles-ci sont des cercles de rayon  $a$  et  $\frac{a}{2}$  respectivement, on a

$$d\Sigma = 3 \cdot d\Sigma_1,$$

d'où

$$\Sigma = 3 \cdot \Sigma_1,$$

$\Sigma$  représente la surface limitée par l'arc de néphroïde AP, par l'arc du cercle fixe MA et par l'arc du cercle mobile MP;  $\Sigma_1$  la surface limitée par le segment AQ et par les arcs MA et MQ des cercles fixe et mobile.

A la surface  $\Sigma$ , ajoutons le segment de cercle  $\omega$  limité par la corde MP; et de même à la surface  $\Sigma_1$ , celui du cercle  $\omega_1$ , limité par la corde MQ. Observons d'ailleurs que ce dernier est égal à  $\Sigma_1$ . Il en résulte que la surface comprise entre l'arc de néphroïde AP, l'arc de cercle MA et la droite MP, est double de la surface comprise entre AQ, QM et l'arc MA. D'où ce théorème :

*La surface comprise entre un arc de néphroïde, compté à partir du point de rebroussement, l'arc correspondant du cercle fixe et la droite qui joint les extrémités de ces arcs, est égale au segment du cercle fixe limité par la corde menée par le point correspondant du cercle fixe, perpendiculairement au diamètre des rebroussements.*

La surface totale de la néphroïde est égale à trois fois celle du cercle fixe.

---