NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL MONTEL

Sur les quadrilatères de Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 57-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__57_0>

[K' 11 c]

SUR LES QUADRILATÈRES DE PONCELET;

PAR M. PAUL MONTEL.

Soient O et O' les centres de deux cercles de rayons R et r, et d la distance de ces centres. Si le cercle O est circonscrit à un triangle dont les côtés sont tangents à O', les nombres R, r et d sont liés par la relation $d^2 = R^2 \pm 2Rr$, due à Euler. M. Gambier a donné récemment une démonstration élégante de la relation d'Euler qui permet de déduire, de l'existence d'un triangle inscrit dans O et circonscrit à O', l'existence d'une infinité de pareils triangles (1).

Je me propose de donner une démonstration élémentaire directe du théorème correspondant relatif au quadrilatère :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère convexe inscrit dans O *et circonscrit à* O' *est*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}. \tag{1}$$

S'il existe un pareil quadrilatère, il en existe une infinité (2).

Je démontrerai cette proposition en faisant voir que:

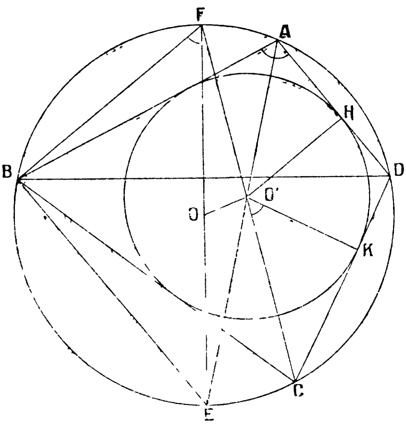
(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. XIV, 1914, p. 366.

(2) Poncelet a démontré que, s'il existe un polygone de n côtés inscrit dans O et circonscrit à O', il en existe une infinité; on donne le nom de *polygones de Poncelet* aux polygones inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle.

1° s'il existe un quadrilatère convexe inscrit dans O et circonscrit à O', la relation (1) est vérifiée; 2° si la relation (1) est vérifiée, on peut construire un quadrilatère inscrit dans O et circonscrit à O' dont l'un des sommets est pris arbitrairement sur O.

Soit ABCD (*fig.* 1) un quadrilatère convexe inscrit

Fig. 1.



dans un cercle O et circonscrit à un cercle O' que nous supposerons d'abord situé dans l'intérieur du quadrilatère; la puissance du centre O' par rapport au cercle O est

$$d^2 - R^2 = - O'A . O'E,$$

E étant le milieu de l'arc BCD. Soient H le point de contact du côté AD et du cercle O', et F, milieu de l'arc BAD, le point diamétralement opposé au point E sur le cercle O. Les triangles AHO' et FBE sont semblables, puisqu'ils sont rectangles, et que les angles $\widehat{BFE}$ et $\widehat{EAD}$ sont tous deux égaux à la moitié de l'angle $\widehat{BAD}$.

On a donc

$$(2) \qquad \frac{O'A}{2R} = \frac{r}{BE},$$

d'où

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE}.$$

Soit K le point de contact du côté CD et du cercle O'; l'angle $\widehat{O'CK}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{EAD}$, puisque les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires; la droite CO' passe d'ailleurs par le point F. Les triangles CKO' et EBF sont semblables et l'on peut écrire

$$(3) \qquad \frac{O'C}{2R} = \frac{r}{BF},$$

d'où, en divisant (2) et (3) membre à membre,

$$\frac{O'A}{O'C} = \frac{BF}{BE}.$$

On déduit de là, comme $\frac{O'A}{O'C} = \frac{O'F}{O'E}$,

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{O'F}{BF} = \frac{\sqrt{\overline{O'E}^2 + \overline{O'F}^2}}{\sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{BF}^2}} = \frac{\sqrt{2(R^2 + d^2)}}{2R};$$

donc

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE} = r\sqrt{2(R^2 + d^2)}$$

et

$$d^2 - R^2 = -r\sqrt{2(R^2 + d^2)}.$$

Si (*fig.* 2) le cercle O' n'est pas intérieur au quadrilatère, il suffit de remarquer que la puissance du point O' est alors égale à $+O'A.O'E$ et de répéter les mêmes raisonnements pour aboutir à la formule

$$d^2 - R^2 = +r\sqrt{2(R^2 + d^2)}.$$

Dans tous les cas, on peut écrire

$$d^2 - R^2 = \pm r\sqrt{2(R^2 + d^2)}$$

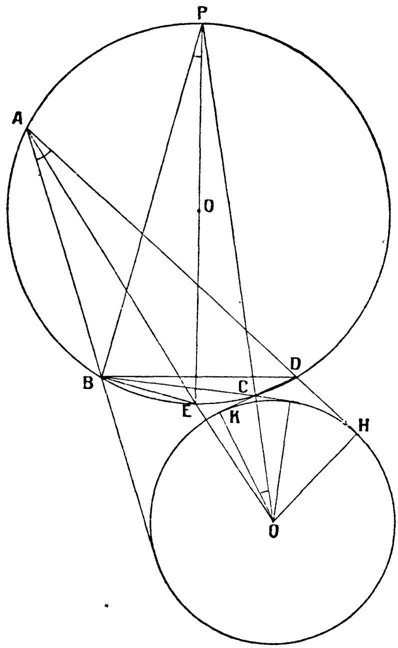
ou

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) = r^2[(R-d)^2 + (R+d)^2],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2}. \tag{1}$$

Fig. 2.



Réciproquement, supposons que cette relation soit satisfaite; on en déduit que

$$\frac{1}{r^2} > \frac{1}{(R-d)^2} \qquad \text{ou} \qquad r^2 < (R-d)^2;$$

donc

$$r < R - d \quad \text{ou} \quad r < d - R.$$

Le cercle O′ est donc tout entier à l'intérieur ou tout entier à l'extérieur du cercle O. Considérons seulement le premier cas : par un point quelconque B du cercle O, menons une tangente BA au cercle O′ qui rencontre le cercle O en un second point A; par A menons la seconde tangente au cercle O′ qui rencontre en D le cercle O, et enfin par D menons la seconde tangente au cercle O′ qui rencontre en C le cercle O; je vais montrer que DC est tangente au cercle O′. Soient encore E et F les milieux des arcs BCD et BAD, et H le point de contact de AD et du cercle O′. Nous pouvons écrire, puisque $d^2 - R^2 = -r\sqrt{2(R^2+d^2)}$,

$$O'A.O'E = r\sqrt{2(R^2+d^2)},$$

et, comme

$$(2) \qquad \frac{O'A}{2R} = \frac{r}{BE},$$

on a aussi

$$O'A.O'E = 2Rr\frac{O'E}{BE};$$

d'où

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{\sqrt{2(R^2+d^2)}}{2R}.$$

Joignons O′F qui rencontre le cercle O au point C′, on aura

$$\frac{O'E}{BE} = \frac{\sqrt{\overline{O'E}^2 + \overline{O'F}^2}}{\sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{BF}^2}} = \frac{O'F}{BF},$$

et comme

$$O'A.O'E = O'F.O'C',$$

$$(4) \qquad \frac{O'C'}{O'A} = \frac{BE}{BF}.$$

Divisons membre à membre les égalités (2) et (4), il vient

$$(5) \qquad \frac{O'C'}{2R} = \frac{r}{BF}.$$

Soit K' le pied de la perpendiculaire abaissée de O' sur $C'D$; les triangles $C'K'O'$ et EBF sont semblables puisqu'ils sont rectangles et que les angles $\widehat{O'C'K'}$ et $\widehat{BEF}$ ont la même mesure; on en conclut la proportion

$$\frac{O'C'}{2R} = \frac{O'K'}{BF},$$

qui, comparée à la proportion (5), montre que $O'K'$ est égal à r : la droite DC' coïncide avec la droite DC et le point C' avec le point C. La droite $O'C$ est alors la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ et, par suite, BC est tangente au cercle O'.

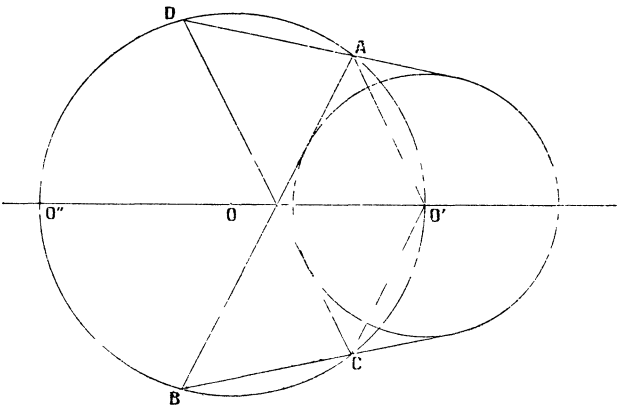
La démonstration est la même lorsque le cercle O' est extérieur au cercle O.

Remarque I. — Nous n'avons pas établi, dans la démonstration réciproque précédente, que le quadrilatère construit est convexe; mais un quadrilatère inscriptible ne peut être que convexe ou biconcave et nous allons voir que, dans ce dernier cas, les cercles O et O' sont nécessairement sécants.

Soit, en effet (*fig.* 3), ABCD un quadrilatère biconcave inscrit dans O et circonscrit à O' : les bissectrices extérieures des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ se coupent en O'; elles doivent aussi se couper au milieu de l'arc AC du cercle O, donc le point O' est situé sur la circonférence O.

Réciproquement, supposons que le cercle O' ait son centre sur O; construisons, comme précédemment, les côtés BA, AD, DC tangents à O′; je dis que le côté BC est aussi tangent à ce cercle; en effet, la droite AO′ est la bissectrice extérieure de l'angle BAD, donc O′ est le milieu de l'arc AO′C du cercle O; par suite, CO′ est la

Fig. 3.



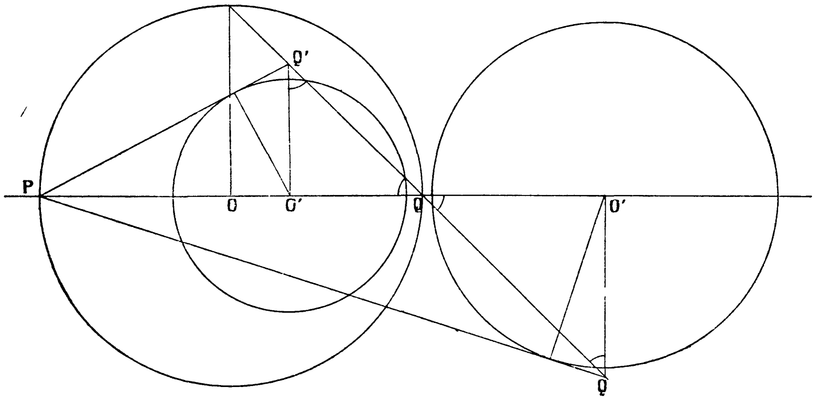
bissectrice extérieure de l'angle BCD et BC est tangente au cercle O′. On peut remarquer que tous les quadrilatères ainsi construits admettent la droite OO′ comme axe de symétrie, car la bissectrice intérieure de l'angle DAB et celle de l'angle BCD rencontrent le cercle O au point O″ diamétralement opposé au point O′: le diamètre O′O″ est perpendiculaire aux cordes AC et BD.

Remarque II. — La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\overline{O'P}^2} + \frac{1}{\overline{O'Q}^2},$$

en appelant P et Q les extrémités du diamètre du cercle O qui passe par O′ : on déduit de cette formule une construction rapide du rayon r lorsqu'on se donne le cercle O et le centre O'. La longueur r est, en effet (*fig.* 4), la hauteur d'un triangle rectangle dont

Fig 4.



les côtés de l'angle droit ont pour longueur O'P et O'Q.

Sous sa dernière forme, la relation (1) peut être rapprochée de la relation d'Euler $d^2 = R^2 \pm 2Rr$, qui s'écrit de même

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{O'P} \pm \frac{1}{O'Q}.$$