NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BOUVAIST

Sur les cercles podaires et isopodaires d'un point par rapport à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 555-562

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__555_1>

[K¹2d]

SUR LES CERCLES PODAIRES ET ISOPODAIRES D'UN POINT PAR RAPPORT A UN TRIANGLE;

Par M. R. BOUVAIST.

Étant donnée une conique Σ de foyers réels F_1 et F_2, on sait que le lieu des points M_1 et M_2 d'intersection d'une tangente variable à Σ avec les droites F_1M_1, F_2M_2 également inclinées sur cette tangente d'un angle V est un cercle ayant son centre sur la perpendiculaire au milieu de F_1F_2 et ayant pour rayon le quotient de la longueur du demi-axe focal de Σ par $\sin V$. On en conclut immédiatement que :

Si, par deux points inverses F_1 et F_2 d'un triangle

ABC, on mène les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$, $F_2\alpha'$, $F_2\beta'$, $F_2\gamma'$ également inclinées sur les côtés BC, CA, AB, les six points α, β, γ, α', β', γ' sont concycliques. Nous désignerons le cercle α, β, γ sous le nom de *cercle isopodaire* du point F_1 par rapport au triangle ABC, l'inclinaison de $F_1\alpha$ sur BC étant donnée.

On connaît le théorème suivant (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 218) : *Les axes radicaux des cercles podaires des points d'une droite* Δ *par rapport à un triangle* ABC *passent par un point fixe* ω *ou, en d'autres termes, ces cercles sont orthogonaux à un cercle fixe de centre* ω.

Je me propose de montrer que ce théorème ne s'étend pas aux cercles isopodaires des points de Δ par rapport à ABC.

Désignons par V, l'angle constant que font les droites $F_1\alpha$, $F_1\beta$, $F_1\gamma$ issues d'un point F_1 de Δ avec les hauteurs de ABC si (α, β, γ) sont les coordonnées de F_1, on voit aisément que, en coordonnées trilinéaires normales, le triangle ABC étant le triangle de référence, le cercle isopodaire de F_1 a pour équation, si l'on pose

$$\Delta = ax + by + cz, \qquad \Delta\alpha = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$
$$C = ayz + bxz + cxy, \qquad C\alpha = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,$$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha\, C\alpha\, C - abc\,\Delta \Big[&\frac{x}{a}\alpha(\gamma + \beta\cos A + \beta\sin A \operatorname{tang} V) \\ &\times(\beta + \gamma\cos A - \gamma\sin A \operatorname{tang} V) \\ &+ \frac{y}{b}\beta(\alpha + \gamma\cos B + \gamma\sin B \operatorname{tang} V) \\ &\times(\gamma + \alpha\cos B - \alpha\sin B \operatorname{tang} V) \\ &+ \frac{z}{c}\gamma(\beta + \alpha\cos C + \alpha\sin C \operatorname{tang} V) \\ &\times(\alpha + \beta\cos C - \beta\sin C \operatorname{tang} V)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les coordonnées des points d'intersection de Δ avec le cercle ABC nous pouvons poser

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + \lambda\beta_2, \qquad \gamma = \gamma_1 + \lambda\gamma_2;$$

d'où

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \lambda\,\Delta\alpha^2,$$

$$C\alpha = \lambda[a(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + b(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1) + c(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)] = \lambda K,$$

l'équation du cercle isopodaire de F_1 devient

$$\lambda K(\Delta\alpha_1 + \lambda\,\Delta\alpha_2)\,C - abc\,\Delta[\lambda^3 D_3 + \lambda^2 D_2 + \lambda D_1 + D_0] = 0,$$

équation qui définit un système de cercles du troisième ordre, se décomposant en la droite de l'infini et en une droite pour $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = -\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta\alpha_2}$, les trois droites correspondantes étant les droites de Simson généralisées, relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, des points d'intersection de Δ et du cercle ABC, et du point inverse du point à l'infini sur Δ.

Pour que le théorème énoncé soit vérifié, il faut que les trois droites qui ont respectivement pour équations $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta\alpha_1 D_2 - \Delta\beta_2 D_1 = 0$ soient concourantes. Si d'ailleurs ces trois droites sont concourantes la puissance du point de rencontre ω de $D_0 = 0$ et $D_3 = 0$ par rapport au cercle isopodaire a l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta\frac{\lambda D_2 + D_1}{\lambda\,\Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_1},$$

quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point ω, c'est-à-dire puisqu'on a

$$\frac{D_2}{\Delta\alpha_2} = \frac{D_1}{\Delta\alpha_1},$$

à l'expression

$$\frac{C}{abc} - \Delta\frac{D_1}{\Delta\alpha_1},$$

expression constante, qui montre que les cercles isopodaires sont orthogonaux à un cercle fixe de centre ω.

Or, si nous désignons par D et E les intersections de Δ avec le cercle ABC, on sait que les droites de Simson généralisées relatives à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, de D et E par rapport au triangle ABC, se coupent lorsque la droite DE se déplace parallèlement à elle-même sur la droite de Simson généralisée relative à l'angle $\frac{\pi}{2} - V$, d'un point F du cercle ABC, défini comme il suit : AA' désignant par exemple la bissectrice intérieure de l'angle A, la parallèle AX à DE menée par A, et la droite AF, font avec AA' de part et d'autre de cette droite les angles $\widehat{XAA'} = u$, $\widehat{A'AF} = u - 2V$. Les deux directions AX et AF ne seront donc inverses, c'est-à-dire les droites $D_0 = 0$, $D_3 = 0$, $\Delta\alpha_1 D_2 - \Delta\alpha_2 D_1 = 0$ ne sont concourantes que si $V = 0$. Le théorème énoncé ne s'applique donc qu'aux cercles podaires des divers points de Δ et non aux cercles isopodaires. [*Voir*, en ce qui concerne les propriétés de trois droites de Simson concourantes, l'étude de M. Lemaire sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Nouv. Ann.*, 1914, p. 49 et 113).]

Le théorème relatif aux cercles podaires peut d'ailleurs se démontrer très facilement géométriquement comme il suit (je crois qu'aucune démonstration n'en a encore été donnée dans les *Nouvelles Annales*).

Soit, en effet, P un point de la droite Δ, la perpendiculaire à Δ en ce point coupe BC en α, AC en β, il existe trois coniques inscrites dans ABC, tangentes à $P\alpha\beta$ et ayant un de leur foyer sur Δ. Soient F_1, F_2, F_3 ces foyers, les cercles podaires de ces trois points par rapport à ABC passeront par P, et l'axe radical de ces trois cercles sera la perpendiculaire abaissée de P sur la droite de Newton du quadrilatère AB$\alpha\beta$. Lorsque P varie sur Δ, cette droite de Newton enveloppe visiblement une parabole inscrite dans le triangle $A'B'C'$ (A', B', C' étant les milieux de BC, CA, AB) et ayant son axe perpendiculaire à Δ. Aα coupe $B'C'$ en α', Bβ coupe $A'C'$ en β', $\alpha'\beta'$, droite de Newton du quadrilatère AB$\alpha\beta$, coupe P$\alpha\beta$ en Q, Q est le point où elle touche son enveloppe, la perpendiculaire abaissée de P sur $\alpha'\beta'$ coupe l'axe de la parabole enveloppe en R, si cet axe coupe Δ en S, le segment RS est constant et égal au paramètre de la parabole, le point R est donc fixe, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — On voit facilement que l'axe de la parabole considérée n'est autre que la droite de Simson du point inverse du point à l'infini sur Δ, et que, si des sommets A, B, C on abaisse des perpendiculaires AA_1, BB_1, CC_1 sur Δ, les perpendiculaires abaissées de A_1, B_1, C_1 sur BC, CA, AB concourent au point R.

THÉORÈME. — *Étant donnée une conique* Σ, *un point fixe* P *sur cette conique*, ABC *un triangle quelconque inscrit dans* Σ, *les cercles isopodaires de* P (*relatifs à un même angle* V) *passent par un point fixe* R, *quel que soit le triangle* ABC.

En effet, il existe une conique S inscrite dans ABC et ayant pour foyer le point P, les droites isotropes de P interceptent dans Σ une corde Δ qui est tangente à S; l'isocline d'un angle V, menée sur Δ par P coupe Δ en R, point fixe qui appartient au cercle isopodaire de P par rapport à ABC. Δ est du reste la polaire du point de Frégier de P, par rapport à Σ.

Remarque. — Si Σ est une hyperbole équilatère et si l'angle V est droit, on voit que le cercle podaire d'un point de cette hyperbole par rapport à un triangle inscrit passe par le centre de la courbe, propriété bien connue, qui conduit immédiatement au théorème de Feuerbach : En effet, soient ABC un triangle, P et P' deux points inverses, le cercle podaire de P et P' coupe le cercle des neuf points de ABC, en ω_1 et ω_2 centres des hyperboles équilatères ABCP, ABCP', si P et P' sont confondus, au centre I d'un des cercles inscrits dans ABC, le cercle correspondant touche le cercle des neuf points au centre de l'hyperbole ABCI.

2° Le théorème précédent donne naissance à un grand nombre de théorèmes particuliers, en voici quelques-uns à titre d'exemple :

α. *Étant données une conique* S, *un point fixe* P, Q *un point variable de cette courbe*, MT *une tangente à* S *parallèle à la symétrique de* PQ *par rapport aux axes, la droite joignant les projections de* P *sur la tangente* MT *et la droite* MQ *joignant son point de contact au point* Q *passe par un point fixe.*

β. *Soient* P *un point d'une conique*, Q_1, Q_2, Q_3 *les trois points de cette courbe dont les cercles osculateurs passent en* P; P_1, P_2, P_3 *les projections de* P *sur les tangentes en* Q_1, Q_2, Q_3; M_1, M_2, M_3 *les milieux de* PP_1, PP_2, PP_3, *les perpendiculaires élevées en* P_1, P_2, P_3 *aux droites* P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 *et la droite de Simson de* P *par rapport au triangle* $P_1P_2P_3$ *sont concourantes.*

Théorème qui peut encore s'énoncer comme il suit :

Si l'on projette le point P, *quatrième point d'in-*

tersection du cercle des neuf points d'un triangle ABC, *avec la conique tangente aux côtés* BC, CA, AB *en leurs milieux* A', B', C', *en* P_1, P_2, P_3 *sur* BC, CA, AB, *les perpendiculaires élevées en* P_1, P_2, P_3 *aux droites joignant ces points aux milieux des segments* PA', PB', PC' *sont concourantes en un point de la droite de Simson de* P *par rapport au triangle* A'B'C'.

γ. *Une droite variable* Δ *coupe une cubique circulaire à point double en* P_1, P_2, P_3, *si* O *désigne le point double, les centres des cercles circonscrits aux triangles* OP_1P_2, OP_2P_3, OP_1P_3 *sont sur un cercle qui passe quelle que soit* Δ *par le point double* O *et le foyer singulier de la courbe.*

Remarque. — Nous avons vu que les cercles podaires des divers points de la droite Δ par rapport à un triangle ABC étaient orthogonaux à un cercle fixe dont le centre pouvait s'obtenir en prenant l'intersection de l'axe de la parabole inscrite dans le triangle A'B'C' médian de ABC, et ayant son axe perpendiculaire à Δ, avec la perpendiculaire abaissée sur BC de la projection A_1 de A sur Δ, nous avons vu aussi que, S désignant l'intersection de l'axe de cette parabole avec Δ, le segment RS était égal au paramètre de ladite parabole. Si A'_1 désigne le symétrique de A_1 par rapport au côté B'C' du triangle médian, la puissance de R par rapport aux divers cercles podaires est égale à $RA_1.RA'_1$, elle sera nulle si A'_1 coïncide avec R, ce qui exige visiblement que Δ soit la directrice de la parabole considérée.

On voit donc que : *Les cercles podaires d'un point quelconque d'un diamètre fixe du cercle circonscrit* *au triangle* ABC *passent par un point fixe* ω, *foyer de la parabole inscrite dans le triangle* A′B′C′ *médian de* ABC *admettant pour directrice ce diamètre, et centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à* ABC, *inverse du diamètre considéré.*