M. D'OCAGNE

Étude géométrique sur la rectification et la quadrature des épi- et hypocycloïdes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 533-555

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__533_0>

[$M^1 8a$] [$M^4 a\alpha$]

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LA RECTIFICATION ET LA QUADRATURE DES ÉPI- ET HYPOCYCLOÏDES (¹);

PAR M. M. D'OCAGNE.

---

1. Le but de cette Note est de faire connaître une forme géométrique des plus simples qui peut être donnée à la solution du double problème de la rectification et de la quadrature des épi- et hypocycloïdes, envisagé dans sa plus grande généralité.

Une épi- ou hypocycloïde étant engendrée par un point M de la circonférence d'un cercle *générateur* $\mathcal{G}$ roulant, soit extérieurement, soit intérieurement, sur un cercle *base* $\mathcal{B}$, nous considérerons deux autres cercles, concentriques à ce dernier, qui jouent aussi un rôle important dans les propriétés de la courbe : celui $\mathcal{L}$, que nous appellerons cercle *limite*, qui constitue avec $\mathcal{B}$ l'enveloppe des positions de $\mathcal{G}$, et celui $\mathcal{M}$, que nous appellerons cercle *moyen*, qui est le lieu du centre de $\mathcal{G}$. La courbe, tout entière inscrite dans la couronne comprise entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$, a ses points de rebroussement, équidistants, sur le premier de ces cercles, et ses sommets, également équidistants, sur le second. Elle est constituée par la répétition identique de l'arc allant d'un point de rebroussement au suivant, engendré pendant une révolution complète du cercle $\mathcal{G}$ et qui,

---

(¹) Les principaux théorèmes rencontrés dans cette étude ont été communiqués par l'auteur à l'Académie des Sciences dans sa séance du 8 novembre 1915 (*Comptes rendus*, t. CLXI, p. 556).

pour cette raison, sera dit un *arc complet;* de même, le segment compris entre un tel arc et le cercle $\mathcal{B}$ sera un *segment complet*, le secteur compris entre le même arc et les rayons issus du centre O de $\mathcal{B}$ et aboutissant en ses extrémités, un *secteur complet*. L'aire comprise entre deux demi-arcs complets, issus d'un même point de rebroussement, et le cercle $\mathcal{L}$ sera dite un *segment complémentaire*.

Les rayons γ, β, λ, μ des cercles $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ sont évidemment liés entre eux par les relations

$$(1) \qquad 2\mu = \beta + \lambda, \qquad 2\gamma = \pm(\lambda - \beta),$$

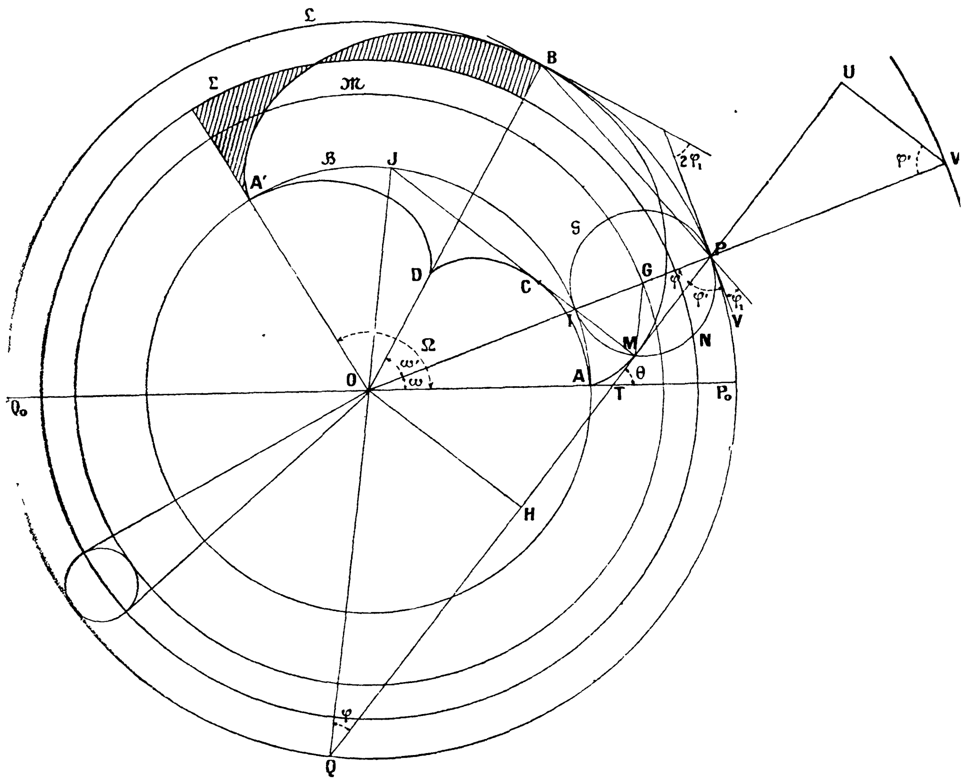
le signe $+$ s'appliquant aux épicycloïdes, le signe $-$ aux hypocycloïdes; mais la suite de cette Note fera comprendre l'intérêt qu'il y a à faire intervenir explicitement ces quatre rayons dans les formules de façon à les rendre indistinctement applicables aux épi- et hypocycloïdes et à faciliter leur interprétation géométrique.

D'une manière générale, nous désignerons respectivement par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ les épi- et les hypocycloïdes. Lorsque $\beta = n\gamma$, *n étant entier*, la courbe devient *algébrique* et possède *n points de rebroussement réels;* nous la désignerons alors par $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$.

Le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$, ou n, qui définit la similitude de l'épi- ou hypocycloïde, peut d'ailleurs être dit son *indice*.

Les plus classiques de ces courbes sont $\mathcal{E}_1$ (*cardioïde*), $\mathcal{E}_2$ (*néphroïde*), $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$, cette dernière dite parfois *astroïde*.

La figure ci-contre s'applique au cas d'une $\mathcal{E}$; mais, nous le répétons, les résultats exprimés en γ, β, λ, μ qui en seront déduits s'étendront sans modification aux $\mathcal{H}$. Nous indiquerons, au reste, chemin faisant, les différences principales dans l'écriture des formules in-



termédiaires qui interviendraient dans le second cas (1).

(1) On pourrait sans doute atteindre à une généralité absolue en ayant recours à certaines conventions de signe relatives aux longueurs des tangentes et des arcs ainsi qu'aux aires des segments; mais cela risquerait d'introduire une apparente complication sans bénéfice réel puisqu'aucune ambiguïté ne pèse sur les résultats ici obtenus.

2. Pour chaque position de $\mathcal{G}$, la normale en M à la courbe $\mathcal{C}$ qu'engendre ce point passe par le point de contact I de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{B}$ (centre instantané); donc la tangente passe par le point de contact P de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{L}$. Cette tangente coupe le cercle $\mathcal{L}$ en un second point Q, et l'on voit que, si l'on considère la position infiniment voisine P′Q′ de cette tangente, les triangles infinitésimaux MPP′, MQQ′ sont semblables, et, par suite, que si $d(\mathrm{P})$ et $d(\mathrm{Q})$ désignent les arcs infiniment petits décrits simultanément par ces points, on a

$$\frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{Q})} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}.$$

Si G est le centre de $\mathcal{G}$, la similitude des triangles GPM et OPQ permet d'en déduire

$$\frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{Q})} = \frac{\gamma}{\mu},$$

d'où, en intégrant à partir de la position initiale $\mathrm{P_0Q_0}$ de PQ

$$\text{(2)} \qquad \frac{\operatorname{arc} \mathrm{P_0P}}{\operatorname{arc} \mathrm{Q_0Q}} = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Dans le cas d'une $\mathcal{H}$, la formule (2) subsisterait, mais les arcs $\mathrm{P_0P}$ et $\mathrm{Q_0Q}$ auraient des sens contraires au lieu d'avoir, comme ici, le même sens.

On tire immédiatement de là, pour l'angle θ que la tangente MT fait avec le rayon initial OA (mesuré par la demi-somme des arcs $\mathrm{P_0P}$ et $\mathrm{Q_0Q}$), la valeur

$$\text{(3)} \qquad \theta = \frac{\lambda}{2\gamma}\omega,$$

ω étant l'angle $\mathrm{P_0OP}$, et, par suite, aussi pour l'angle OPM ou φ, égal à $\theta - \omega$, la valeur

$$\text{(4)} \qquad \varphi = \frac{\beta}{2\gamma}\omega.$$

Cette dernière formule comporte des conséquences curieuses que nous ferons remarquer en passant ([1]).

Si Ω est la valeur de ω correspondant à un arc complet, on voit que

$$\Omega = \frac{2\pi\gamma}{\beta}. \tag{5}$$

Donc, si nous appelons ω' l'angle BOP, il vient

$$\omega' = \frac{\Omega}{2} - \omega = \frac{2\gamma}{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

ou encore, si nous désignons par φ' l'angle de la tangente MP avec la tangente en P au cercle $\mathfrak{L}$,

$$\omega' = \frac{2\gamma}{\beta}\varphi', \tag{4 bis}$$

ou enfin, puisque l'angle φ_1 que BP fait avec la tangente PV au cercle $\mathfrak{L}$ est égal à $\frac{\omega'}{2}$,

$$\varphi' = \frac{\beta}{\gamma}\varphi_1.$$

([1]) Ces variables φ et ω constituent ce qu'on peut appeler des *coordonnées naturelles* pour l'étude en question. Leur emploi rend absolument intuitives certaines propositions connues relatives aux épi- ou hypocycloïdes, qui se démontrent traditionnellement de façon beaucoup plus laborieuse. Il suffit, par exemple, ayant posé $OIJ = \varphi'$ et $IGM = \varphi''$, de remplacer, dans l'équation (4), l'angle φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ ou $\frac{\varphi''}{2}$ pour obtenir sans autre calcul les théorèmes suivants :

La développée d'une épi- ou hypocycloïde est une épi- ou hypocycloïde semblable à la première (même indice), mais ayant pour cercle limite le cercle base de celle-ci.

L'enveloppe du diamètre du cercle générateur qui passe par le point décrivant d'une épi- ou hypocycloïde est une épi- ou hypocycloïde ayant pour cercle limite le cercle moyen de la première avec un indice double du sien.

Dans le cas où il s'agirait d'une $\mathcal{H}$ au lieu d'une $\mathcal{E}$, le résultat serait le même, mais les angles φ_1 et φ' seraient comptés du même côté de la tangente au lieu de l'être de part et d'autre. Cela constitue, comme on voit, un mode de génération très simple de toutes les $\mathcal{E}$ et les $\mathcal{H}$ admettant $\mathcal{L}$ comme cercle limite.

Il résulte de ce mode de génération que *les courbes* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{H}$ *ayant même cercle* $\mathcal{L}$ *et correspondant à un même indice* $\frac{\beta}{\gamma}$ *sont telles que leurs tangentes issues d'un même point* P *de* $\mathcal{L}$ *sont symétriques par rapport à la tangente* PV *à ce cercle.*

Si $\frac{\beta}{\gamma} = 1$, la tangente à la courbe $\mathcal{E}_1$ (cardioïde) est symétrique de BP par rapport à la tangente à $\mathcal{L}$ en P. On peut donc dire que *la cardioïde est la caustique par réflexion des rayons issus de son sommet par rapport à son cercle limite.* A la forme près, ce théorème est bien connu.

Si $\frac{\beta}{\gamma} = 2$, la tangente à la courbe $\mathcal{E}_2$ (néphroïde) fait avec la tangente à $\mathcal{L}$ en P un angle double de celui que BP fait avec cette tangente, c'est-à-dire égal à celui que fait avec cette même tangente la tangente à $\mathcal{L}$ en B; de là découle immédiatement ce théorème, découvert pour la première fois par Huygens (*Œuvres*, t. VIII, p. 214), que *la néphroïde est la caustique par réflexion des rayons parallèles au diamètre sur lequel se trouvent ses rebroussements par rapport à son cercle limite.*

D'une manière générale, on passe d'une $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ à une autre par la transformation tangentielle définie, en chaque point P du cercle limite $\mathcal{L}$ commun, par la relation liant les angles φ_n et $\varphi_{n'}$ des tangentes à ces courbes avec la tangente PV à ce cercle, savoir

$$\frac{\varphi_n}{n} = \frac{\varphi_{n'}}{n'},$$

les angles φ_n et $\varphi_{n'}$ étant de même sens pour deux courbes de même espèce, et de sens contraires dans l'autre cas.

Remarquons encore que l'angle de deux droites n'étant défini qu'à π près, la division de cet angle en n parties égales conduit à n droites distinctes. Les n droites ainsi obtenues pour chaque tangente à une $\mathcal{E}_n$ passent par les n sommets de cette courbe.

3. Si nous prolongeons MI et QO jusqu'en leur point de rencontre J, le triangle OIJ est isocèle comme OPQ puisque IJ est perpendiculaire à PQ; donc J se trouve sur le cercle $\mathcal{B}$ et, de plus, QJ, égal à la somme des rayons $OJ = \beta$ et $OQ = \lambda$, a pour longueur 2μ. On a, par suite, immédiatement, dans les triangles OPH, IPM, JQM, les relations

$$OH = \lambda \sin\varphi, \qquad PH = \lambda \cos\varphi, \tag{6}$$

$$MI = 2\gamma \sin\varphi, \qquad MP = 2\gamma \cos\varphi, \tag{7}$$

$$MJ = 2\mu \sin\varphi, \qquad MQ = 2\mu \cos\varphi. \tag{8}$$

Le point M divisant PQ dans un rapport constant $\left(\text{égal à } \frac{\gamma}{\mu}\right)$ et les normales aux lieux décrits par P et Q coupant en I et J la normale à l'enveloppe de PQ, dont C est le centre de courbure, on sait que C divise IJ dans le même rapport que M divise PQ; autrement dit,

$$\frac{MC - MI}{MJ - MC} = \frac{MP}{MQ},$$

ou, en représentant par r le rayon de courbure MC,

$$r = \frac{MI.MQ + MJ.MP}{2PH},$$

c'est-à-dire, d'après (6), (7), (8),

$$r = \frac{4\gamma\mu}{\lambda} \sin\varphi. \tag{9}$$

ou encore, en vertu de (6),

$$(9\ bis)\qquad r = \frac{4\gamma\mu}{\lambda^2}p.$$

Cette formule subsiste, bien entendu, pour une $\mathcal{H}$ à cette seule différence près que O et C sont alors de part et d'autre de la tangente PQ au lieu d'être du même côté.

Si l'on met en évidence l'indice $n = \frac{\beta}{\gamma}$ dans le coefficient de p de la dernière formule écrite, on voit qu'elle devient

$$r = \frac{4(n+1)}{(n+2)^2}p \qquad \text{pour une } \mathcal{E},$$

$$r = \frac{4(n-1)}{(n-2)^2}p \qquad \text{pour une } \mathcal{H}.$$

Sous cette forme, on voit que *le rapport* $\frac{r}{p}$ *n'est entier pour aucune valeur entière de* n *dans le cas d'une* $\mathcal{E}_n$, *et qu'il ne l'est, dans le cas d'une* $\mathcal{H}_n$ *que pour* $n = 3$ *et* $n = 4$. On voit aussi que *ce rapport n'est égal à* 1 *pour aucune* $\mathcal{E}$, *et qu'il l'est pour une* $\mathcal{H}$ *lorsque* n *est racine de*

$$n^2 - 8n + 8 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$n = 2(2 \pm \sqrt{2}),$$

auquel cas il est facile de voir que *le diamètre* 2γ *du cercle* $\mathcal{G}$ *est égal à la flèche d'un arc sous-tendu dans le cercle* $\mathcal{B}$ *par un côté du carré inscrit.*

En tout sommet B, on a $p = \lambda$ et, par suite, il vient, pour la valeur du rayon de courbure r_1 en ce sommet,

$$(10)\qquad r_1 = \frac{4\gamma\mu}{\lambda}.$$

Comme précédemment, on peut mettre cette expression sous la forme

$$r_1 = \frac{4(n+1)}{n+2}\gamma \qquad \text{pour une } \mathcal{E},$$

$$r_1 = \frac{4(n-1)}{(n-2)}\gamma \qquad \text{pour une } \mathcal{H},$$

et l'on voit ainsi que *le rapport du rayon de courbure r_1 au sommet au rayon γ du cercle générateur n'est entier, pour une valeur entière de n, que pour les courbes $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$. Il est égal à* 1 *pour la courbe $\mathcal{H}$ correspondant à $n = \frac{2}{3}$.*

4. Passons à la rectification de la courbe. L'élément d'arc en est donné par

$$ds = r\,d\theta$$

ou, d'après (9), (3) et (4),

$$ds = \frac{4\gamma\mu}{\beta}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Il en résulte, si l'on intègre entre M et le sommet B où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et qu'on représente par s l'arc BM, que

$$s = \frac{4\gamma\mu}{\beta}\cos\varphi. \tag{11}$$

Rapprochant cette formule de la seconde (7), on voit qu'on peut aussi l'écrire, en posant $\mathrm{MP} = t$,

$$s = \frac{2\mu}{\beta}t. \tag{11 bis}$$

La formule (11) peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{2}{s} = \frac{\beta}{2\gamma\mu\cos\varphi},$$

ou, si l'on y remplace β par sa valeur $\mu - \gamma$ [1],

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{2\gamma\cos\varphi} - \frac{1}{2\mu\cos\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{\mathrm{MP}} - \frac{1}{\mathrm{MQ}}.$$

Il suit de là que, *si* U *est le conjugué harmonique de* M *par rapport à* P *et* Q, *on a*

$$\operatorname{arc}\mathrm{BM} = \mathrm{MU},$$

et conséquemment que *le point* U *décrit la développante de l'épicycloïde qui part du sommet* B.

Il est facile de reconnaître la nature de cette développante. En effet, de ce que $\mathrm{PU} = \mathrm{MU} - \mathrm{MP}$ on déduit immédiatement, eu égard aux formules (11) et (7), que

$$\mathrm{PU} = \frac{2\gamma\lambda}{\beta}\cos\varphi.$$

Si donc la tangente à la développante, perpendiculaire en U à PU, coupe OP en W, on a

$$\mathrm{PW} = \frac{2\gamma\lambda}{\beta}.$$

Le lieu de W est donc un cercle de centre O, et comme les angles $\mathrm{BOW} = \omega'$ et $\mathrm{OWU} = \varphi'$ sont liés par la relation (4 *bis*) identique à celle (4) qui lie ω

---

[1] Dans le cas d'une $\mathcal{H}$, on aurait

$$\beta = \mu + \gamma$$

et, par suite,

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{\mathrm{MP}} + \frac{1}{\mathrm{MQ}},$$

mais comme le point M serait alors en dehors du segment PQ, cette égalité définirait bien encore le conjugué harmonique de ce point par rapport à P et Q.

et φ, on voit que *la développante, enveloppe de* UW, *est une épicycloïde de même indice que l'épicycloïde donnée, mais ayant pour cercle base le cercle limite de celle-ci.* C'est un théorème bien connu.

Si l'on en rapproche la remarque faite ci-dessus relativement au point U, on voit que *le centre de courbure en un point d'une épi- ou hypocycloïde est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points où la normale rencontre le cercle base.*

L'arc complet de l'épicycloïde d'abord considérée étant le double de l'arc AB, et le segment t étant pour le point A égal à 2γ, la formule (11 *bis*) donne immédiatement, pour la longueur s_c de cet arc complet, l'expression

$$s_c = \frac{8\mu\gamma}{\beta}. \tag{12}$$

Si la courbe est algébrique, sa longueur totale s_t est donnée par ns_c, n étant le nombre des arcs complets. égal à $\frac{\beta}{\gamma}$; donc

$$s_t = 8\mu, \tag{13}$$

c'est-à-dire que *la longueur totale d'une $\mathcal{E}_n$ ou d'une $\mathcal{H}_n$ algébrique est égale au périmètre du carré circonscrit à son cercle moyen.*

L'élimination de φ entre (9) et (11) donne immédiatement

$$\lambda^2 r^2 + \beta^2 s^2 = 16\gamma^2\mu^2, \tag{14}$$

qui est *l'équation intrinsèque d'un arc complet d'épi- ou hypocycloïde.*

La loi de rectification que définit la formule (11 *bis*) est intéressante à la fois par son extrême simplicité et son entière généralité. Il se peut toutefois que, pour certaines $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ particulières, on puisse rencontrer d'autres lois de rectification non moins simples. En voici un exemple :

D'une manière générale, on a

$$\mathrm{MT} = \mathrm{PT} - \mathrm{PM} = \lambda \frac{\sin\omega}{\sin\theta} - 2\gamma\cos\varphi$$

et

$$\operatorname{arc}\mathrm{MA} = \operatorname{arc}\mathrm{AB} - \operatorname{arc}\mathrm{BM} = \frac{4\mu\gamma}{\beta}(1 - \cos\varphi),$$

et la relation entre ces deux longueurs n'est généralement pas simple; mais dans le cas d'une $\mathcal{H}_4$, définie par $\beta = 4\gamma$, ce qui donne $\mu = 3\gamma$ et $\lambda = 2\gamma$, on a, d'après (3), $\omega = \theta$, et les deux formules précédentes deviennent

$$\mathrm{MT} = 2\gamma(1 - \cos\varphi),$$
$$\operatorname{arc}\mathrm{MA} = 3\gamma(1 - \cos\varphi).$$

Par suite, pour une telle courbe,

$$\operatorname{arc}\mathrm{MA} = \frac{3}{2}\mathrm{MT}.$$

Remarquons que, si A′ est le second point de rebroussement limitant l'arc complet auquel appartient M et si la tangente en M coupe de même en T′ la tangente en A′, on aurait de même

$$\operatorname{arc}\mathrm{MA}' = \frac{3}{2}\mathrm{MT}'.$$

En somme,

$$\frac{\operatorname{arc}\mathrm{MA}}{\mathrm{MT}} = \frac{\operatorname{arc}\mathrm{MA}'}{\mathrm{MT}'} = \frac{\operatorname{arc}\mathrm{AA}'}{\mathrm{TT}'} = \frac{3}{2}.$$

Cela établit ce fait bien connu que *le segment* TT′ *de la tangente à la* $\mathcal{H}_4$ *est constant*, mais, en outre, que *le point* M *divise dans le même rapport l'arc* AA′ *et le segment* TT′ *de la tangente.*

5. L'élément d'aire $d\sigma$, balayé par le segment MP de la tangente, est donné par

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{2} d\theta,$$

ou, d'après (7), (3) et (4),

$$d\sigma = 2\frac{\lambda\gamma^2}{\beta}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda\gamma^2}{\beta}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Intégrant de φ à $\frac{\pi}{2}$ pour avoir l'aire σ limitée aux arcs BM et BP, on a immédiatement

$$(15) \qquad \sigma = \frac{\lambda}{\beta}\left[\frac{\gamma^2(\pi - 2\varphi)}{2} - \frac{\gamma^2 \sin 2\varphi}{2}\right],$$

ou, si l'on remarque que l'expression entre crochets n'est autre que l'*aire u du segment* MNP *du cercle* $\mathcal{G}$,

$$(15\ bis) \qquad \sigma = \frac{\lambda}{\beta} u.$$

Il résulte immédiatement de là que l'*aire du demi-segment complémentaire* ABP_0 *est égale au produit par* $\frac{\lambda}{\beta}$ *de celle du demi-cercle* $\mathcal{G}$. Si donc σ_0 désigne l'aire du segment complémentaire, on a

$$(16) \qquad \sigma_0 = \frac{\lambda}{\beta}\pi\gamma^2$$

ou, si l'on tient compte de la valeur (5) de l'angle au centre Ω du secteur complet,

$$(16\ bis) \qquad \sigma_0 = \frac{\Omega}{2}\lambda\gamma.$$

Par suite, l'aire σ_1 du segment complet sera

$$\sigma_1 = \frac{\Omega}{2}(\lambda^2 - \beta^2 - \lambda\gamma)$$

ou

$$\sigma_1 = \frac{\Omega}{2}(\lambda\mu - \beta^2). \tag{17}$$

Pour une $\mathcal{H}$, il suffit de changer le signe du second membre. On peut encore écrire cette formule

$$\sigma_1 = \frac{\pi\gamma^2(3\beta \pm 2\gamma)}{\beta}, \tag{17 bis}$$

le signe $+$ s'appliquant à une $\mathcal{E}$, le signe $-$ à une $\mathcal{H}$.

L'aire du secteur complet égale à $\frac{\Omega\beta^2}{2} + \sigma_1$ pour une $\mathcal{E}$ et à $\frac{\Omega\beta^2}{2} - \sigma_1$ pour une $\mathcal{H}$, est donnée dans les deux cas par

$$\sigma_c = \frac{\Omega}{2}\lambda\mu. \tag{18}$$

Puisque Ω est l'angle au centre du secteur, on voit que *si l'on considère le cercle* Σ *de centre* O *dont le rayon est égal à* $\sqrt{\lambda\mu}$, *c'est-à-dire celui qui coupe orthogonalement tous les cercles inscrits dans la couronne comprise entre les cercles* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{M}$, *le second membre de* (18) *représente l'aire du secteur de ce cercle* Σ *compris entre les mêmes rayons* OA *et* OA'.

L'égalité de ce secteur épicycloïdal et de ce secteur circulaire entraîne, sur la figure, l'équivalence des aires des deux triangles mixtilignes couverts de hachures.

De là résulte immédiatement aussi que, s'il s'agit d'une $\mathcal{E}_n$ ou d'une $\mathcal{H}_n$, son aire totale, égale à celle du cercle Σ, est donnée par

$$\sigma_t = \pi\lambda\mu. \tag{19}$$

On peut encore dire que l'*aire totale est la moyenne géométrique entre les aires des cercles* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{M}$.

Si enfin nous représentons par τ l'aire comprise entre un arc de la courbe, les normales en ses extrémités et l'arc correspondant de la développée, nous avons

$$d\tau = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta,$$

ou, eu égard à (9), (3) et (4),

$$d\tau = \frac{8\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{4\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Si donc on intègre à partir du rebroussement A où $\varphi = 0$, on a

(20) $$\tau = \frac{4\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right),$$

et il vient pour l'aire totale comprise entre un arc complet ABA′ de la courbe et l'arc correspondant ADA′ de la développée

(21) $$\tau_c = \frac{4\pi\gamma^2\mu^2}{\lambda\beta}.$$

La formule (20) peut s'interpréter géométriquement de façon analogue à (15). On voit, en effet, tout de suite que, si u' est l'aire du petit segment détaché dans le cercle $\mathcal{G}$ par la corde IM, on a

(20 *bis*) $$\tau = \frac{4\mu^2}{\lambda\beta} u'.$$

6. A titre d'exemples, nous allons indiquer ce que deviennent les formules précédentes dans le cas des quatre courbes particulières citées dans l'avant-dernier alinéa du n° **1**, en rappelant que :

p désigne la distance OH du centre à la tangente;
t, le segment MP de cette tangente;

r, le rayon de courbure MC en M;
r_1, le rayon de courbure en chaque sommet;
s, l'arc BM de la courbe, compté à partir du sommet B;
s_t, la longueur totale de la courbe;
σ, l'aire BMP;
u, le segment MNP du cercle $\mathcal{G}$;
σ_0, l'aire du segment complémentaire (double de BAP_0);
σ_1, l'aire du segment complet ABA';
σ_t, l'aire totale;
τ_c, l'aire comprise entre un arc complet ABA' et l'arc correspondant ADA' de la développée.

Épicycloïde $\mathcal{E}_1$ (cardioïde).

$$\gamma = \beta, \qquad \lambda = 3\beta, \qquad \mu = 2\beta,$$
$$r = \frac{8p}{9}, \qquad r_1 = \frac{8\beta}{3} = \frac{8\gamma}{3} = \frac{8\lambda}{9} = \frac{4\mu}{3},$$
$$s = 4t, \qquad s_t = 16\beta = 16\gamma = \frac{16\lambda}{3} = 8\mu,$$
$$9r^2 + s^2 = 64\beta^2 = 64\gamma^2 = \frac{64\lambda^2}{9} = 16\mu^2, \qquad \sigma = 3u,$$
$$\sigma_0 = 3\pi\beta^2 = 3\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{3} = \frac{3\pi\mu^2}{4},$$
$$\sigma_1 = 5\pi\beta^2 = 5\pi\gamma^2 = \frac{5\pi\lambda^2}{9} = \frac{5\pi\mu^2}{4},$$
$$\sigma_t = 6\pi\beta^2 = 6\pi\gamma^2 = \frac{2\pi\lambda^2}{3} = \frac{3\pi\mu^2}{2},$$
$$\tau_c = \frac{16\pi\beta^2}{3} = \frac{16\pi\gamma^2}{3} = \frac{16\pi\lambda^2}{27} = \frac{4\pi\mu^2}{3}.$$

Épicycloïde $\mathcal{E}_2$ (néphroïde).

$$\gamma = \frac{\beta}{2}, \qquad \lambda = 2\beta, \qquad \mu = \frac{3\beta}{2},$$
$$r = \frac{3p}{4}, \qquad r_1 = \frac{3\beta}{2} = 3\gamma = \frac{3\lambda}{4} = \mu,$$
$$s = 3t, \qquad s_t = 12\beta = 24\gamma = 6\lambda = 8\mu.$$

$$4r^2 + s^2 = 9\beta^2 = 36\gamma^2 = \frac{9\lambda^2}{4} = 4\mu^2, \qquad \sigma = 2u,$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{2} = 2\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{8} = \frac{2\pi\mu^2}{9},$$

$$\sigma_1 = \pi\beta^2 = 4\pi\gamma^2 = \frac{\pi\lambda^2}{4} = \frac{4\pi\mu^2}{9},$$

$$\sigma_t = 3\pi\beta^2 = 12\pi\gamma^2 = \frac{3\pi\lambda^2}{4} = \frac{4\pi\mu^2}{3},$$

$$\tau_c = \frac{9\pi\beta^2}{8} = \frac{9\pi\gamma^2}{2} = \frac{9\pi\lambda^2}{32} = \frac{\pi\mu^2}{2}.$$

Hypocycloïde $\mathcal{H}_3$.

$$\gamma = \frac{\beta}{3}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{3}, \qquad \mu = \frac{2\beta}{3},$$

$$r = 8p, \qquad r_1 = \frac{8\beta}{3} = 8\gamma = 8\lambda = 4\mu,$$

$$s = \frac{4t}{3}, \qquad s_t = \frac{16\beta}{3} = 16\gamma = 16\lambda = 8\mu,$$

$$r^2 + 9s^2 = \frac{64\beta^2}{9} = 64\gamma^2 = 64\lambda^2 = 16\mu^2, \qquad \sigma = \frac{u}{3},$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{27} = \frac{\pi\gamma^2}{3} = \frac{\pi\lambda^2}{3} = \frac{\pi\mu^2}{12},$$

$$\sigma_1 = \frac{7\pi\beta^2}{27} = \frac{7\pi\gamma^2}{3} = \frac{7\pi\lambda^2}{3} = \frac{7\pi\mu^2}{12},$$

$$\sigma_t = \frac{2\pi\beta^2}{9} = 2\pi\gamma^2 = 2\pi\lambda^2 = \frac{\pi\mu^2}{2},$$

$$\tau_c = \frac{16\pi\beta^2}{27} = \frac{16\pi\gamma^2}{3} = \frac{16\pi\lambda^2}{3} = \frac{4\pi\mu^2}{3}.$$

Hypocycloïde $\mathcal{H}_4$ *(astroïde)*.

$$\gamma = \frac{\beta}{4}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{2}, \qquad \mu = \frac{3\beta}{4},$$

$$r = 3p, \qquad r_1 = \frac{3\beta}{2} = 6\gamma = 3\lambda = 2\mu,$$

$$s = \frac{3t}{2}, \qquad s_t = 6\beta = 24\gamma = 12\lambda = 8\mu,$$

$$r^2 + 4s^2 = \frac{9\beta^2}{4} = 36\gamma^2 = 9\lambda^2 = 4\mu^2, \qquad \sigma = \frac{u}{2},$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi\beta^2}{32} = \frac{\pi\gamma^2}{2} = \frac{\pi\beta^2}{8} = \frac{\pi\mu^2}{18},$$

$$\sigma_1 = \frac{5\pi\beta^2}{32} = \frac{5\pi\gamma^2}{2} = \frac{5\pi\beta^2}{8} = \frac{5\pi\mu^2}{18},$$

$$\sigma_t = \frac{3\pi\beta^2}{8} = 6\pi\gamma^2 = \frac{3\pi\lambda^2}{2} = \frac{2\pi\mu^2}{3},$$

$$\tau_c = \frac{9\pi\beta^2}{32} = \frac{9\pi\gamma^2}{2} = \frac{9\pi\lambda^2}{8} = \frac{\pi\mu^2}{2}.$$

Le seul examen de ce Tableau suggère diverses remarques telles que celles-ci :

Pour un même cercle base, la grandeur du rayon de courbure au sommet est la même pour la cardioïde et la $\mathcal{H}_3$; *elle est aussi la même pour la néphroïde et l'astroïde; la longueur de la cardioïde est triple de celle de la* $\mathcal{H}_3$; *la longueur de la néphroïde est double de celle de l'astroïde; l'aire de la cardioïde est double de celle de la néphroïde, etc.*

Pour un même cercle générateur, la cardioïde et la $\mathcal{H}_3$ *d'une part, la néphroïde et l'astroïde de l'autre ont même longueur; la cardioïde et l'astroïde ont même aire, la néphroïde a une aire double, la* $\mathcal{H}_3$ *a une aire trois fois plus petite, l'aire entre arc complet et développée est la même pour la cardioïde et la* $\mathcal{H}_3$, *la même pour la néphroïde et l'astroïde, etc.*

Pour un même cercle limite, la longueur de la cardioïde est le tiers de celle de la $\mathcal{H}_3$, *la longueur de la néphroïde est la moitié de celle de l'astroïde; l'aire de la cardioïde est le tiers de celle de la* $\mathcal{H}_3$, *l'aire de la néphroïde est la moitié de celle de l'astroïde, etc.*

Pour un même cercle moyen, nous savons déjà par la formule (13) que *toutes ces courbes ont même longueur*, ceci étant vrai pour une $\mathcal{E}_n$ ou $\mathcal{H}_n$ quelconque admettant ce cercle moyen, mais, en outre, on voit que *l'aire de la cardioïde est le triple de celle de la* $\mathcal{H}_3$, *l'aire de la néphroïde double de celle de l'astroïde, l'aire entre arc complet et développée est la même pour la cardioïde et la* $\mathcal{H}_3$, *la même pour la néphroïde et l'astroïde, etc.*

On peut obtenir de cette façon un grand nombre de propositions particulières.

Remarquons aussi qu'on peut, des formules ci-dessus établies, en déduire d'autres applicables à la cycloïde en regardant celle-ci comme la limite d'une épi- ou hypocycloïde pour laquelle, γ conservant une valeur fixe, β, λ et μ tendent vers l'infini, alors que leurs mutuels rapports tendent vers l'unité.

On voit ainsi qu'à la limite :

La formule	(9)	donne.......	$r = 4\gamma \sin\varphi = 2\mathrm{MI}$
»	(10)	»	$r_1 = 4\gamma$
»	(11 *bis*)	»	$s = 2t$
»	(12)	»	$s_t = 8\gamma$
»	(14)	»	$r^2 + s^2 = 16\gamma^2$
»	(15 *bis*)	»	$\sigma = u$
»	(16)	»	$\sigma_0 = \pi\gamma^2$
»	(17 *bis*)	»	$\sigma_1 = 3\pi\gamma^2$
»	(20 *bis*)	»	$\tau = 4u'$
»	(21)	»	$\tau_c = 4\pi\gamma^2$

On reconnaît là des propriétés classiques de la cycloïde.

7. La considération des quatre cercles $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ conduit à trois modes d'association entre les $\mathcal{E}$ et les $\mathcal{H}$ qui méritent d'être signalés.

Lorsqu'on se donne deux des trois derniers parmi ces cercles, le troisième ainsi que $\mathcal{G}$ sont déterminés sans ambiguïté et, par suite, on se trouve avoir défini une, et une seule, $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$.

Mais, si l'on se donne le cercle $\mathcal{G}$ et l'un des trois derniers, on peut disposer du sens dans lequel on fait croître ou décroître le rayon de celui-ci pour obtenir les rayons des deux autres et, par suite, on se trouve avoir défini à la fois une $\mathcal{E}$ et une $\mathcal{H}$, et ce sont ces deux courbes qui seront dites *associées* par leur cercle de base, leur cercle limite ou leur cercle moyen.

Si le rayon choisi pour le cercle $\mathcal{G}$ est une partie aliquote du rayon du cercle $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{M}$ qu'on se donne, cette $\mathcal{E}$ et cette $\mathcal{H}$ associées sont algébriques ; mais, ici, il convient de préciser davantage :

1° Si l'association se fait par le cercle $\mathcal{B}$ et que $\gamma = \frac{\beta}{n}$, les courbes associées sont $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{H}_n$.

2° Si l'association se fait par le cercle $\mathcal{L}$ et que $\gamma = \frac{\lambda}{n}$, on a

$$\beta = (n-2)\gamma, \qquad \beta' = (n+2)\gamma,$$

et, par suite, les courbes associées sont $\mathcal{E}_{n-2}$ et $\mathcal{H}_{n+2}$.

3° Enfin si l'association se fait par le cercle $\mathcal{M}$ et que $\gamma = \frac{\mu}{n}$, on a

$$\beta = (n-1)\gamma, \qquad \beta' = (n+1)\gamma,$$

et les courbes associées sont $\mathcal{E}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_{n+1}$.

On peut d'ailleurs regarder comme correspondants de l'une à l'autre courbe associée les points M et M′ ainsi définis : plaçant, à l'origine, les points décrivants sur un même rayon issu de O, on fait rouler les cercles générateurs, à partir de cette position, sur les cercles correspondants de façon que les rayons unissant le centre O au centre de chaque cercle générateur tournent dans le même sens. Dès lors, les positions M et M′ des points décrivants seront dites *correspondantes* lorsqu'elles répondront à des rotations égales des cercles générateurs autour de leurs centres respectifs, autrement dit, lorsque les arcs MI et M′I′, comptés à partir des points de contact I et I′ avec les cercles bases, seront égaux. Dans ces conditions, en deux points correspondants des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ associées, les quantités que nous avons appelées φ, t, u sont les mêmes. Tenant compte de l'identité de ces éléments dans les formules précédentes on en déduit des relations entre éléments correspondants des courbes associées.

Nous allons en donner quelques exemples :

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse d'une $\mathcal{E}$ et d'une $\mathcal{H}$ associées par le cercle $\mathcal{A}$ (1). Ici, par exemple, la formule (11 *bis*) donne (puisque β et t ont même valeur aux deux points correspondants)

$$\frac{s}{s'} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma},$$

de même la formule (15 *bis*)

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\beta+2\gamma}{\beta-2\gamma},$$

et la formule (17 *bis*)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma'_1} = \frac{3\beta+2\gamma}{3\beta-2\gamma}.$$

(1) C'est à ce mode d'association que nous avons consacr récemment une Note spéciale dans les *Nouvelles Annales* (1915, p. 433). On y trouvera la première et la troisième des formules ici données [formules (4), p. 437, et (6), p. 439].

Supposons maintenant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ associées par le cercle $\mathcal{L}$. Ici la formule (15 *bis*) donnera

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\lambda + 2\gamma}{\lambda - 2\gamma},$$

et la formule (19)

$$\frac{\sigma_t}{\sigma'_t} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma}.$$

Prenons enfin le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ sont associées par le cercle $\mathcal{M}$. Dans ce cas, on a

$$\beta = \lambda' = \mu - \lambda, \qquad \beta' = \lambda = \mu + \gamma.$$

La formule (11 *bis*) donne alors

$$\frac{s}{s'} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\mu + \gamma}{\mu - \gamma},$$

et (13), comme nous le savons déjà,

$$s_t = s'_t.$$

En outre, la formule (14) donne lieu à une remarque curieuse; elle montre, en effet, qu'on a, entre deux couples quelconques de valeurs de r et s, d'une part, de r' et s', de l'autre, la relation

$$(\mu + \gamma)^2 r^2 + (\mu - \gamma)^2 s^2 = (\mu - \gamma)^2 r'^2 + (\mu + \gamma)^2 s'^2.$$

Cela établit, entre les rayons de courbure et les arcs des deux courbes associées, la loi de réciprocité que voici : *les arcs s et s' étant comptés à partir des sommets respectifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$, si l'on prend sur l'une de ces courbes un arc s égal à l'un des rayons de courbure r' de l'autre, le rayon de courbure r est égal à l'arc s'.*

On peut encore dire que, *si l'on fait rouler sur une droite les arcs complets des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ associées, de façon à faire coïncider les milieux des arcs développés, les lieux engendrés par les centres* *de courbure répondant aux points de contact sont, dans les deux cas, des ellipses qui ne diffèrent entre elles que par une rotation d'un angle droit autour de leur centre commun.*

En particulier, on voit, en faisant $n = 2$ dans le 3° ci-dessus, qu'une telle relation a lieu entre la cardioïde et la $\mathcal{H}_3$ ayant même cercle moyen.

Enfin, la formule (19) donne ici

$$\frac{\sigma_t}{\sigma'_t} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu + \gamma}{\mu - \gamma}.$$

Ces quelques exemples suffiront à mettre en évidence le genre des relations existant entre éléments homologues d'une épi- et d'une hypocycloïde associées suivant l'un des modes qui viennent d'être indiqués.