Questions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 477-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__477_0>

QUESTIONS.

2259. Soit PQR le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse (E), issues d'un point de cette ellipse. Démontrer que le triangle PQR est inscrit à une ellipse passant par les sommets de la développée de (E).

T. Ono.

2260. On donne un losange ABCD et le cercle inscrit O. Une tangente variable rencontre les côtés BC et CD en M et N entre B et C, C et D. Montrer que l'aire du triangle AMN reste constante.

V. Thébault.

2261. On considère un tétraèdre SABC trirectangle en S et une sphère quelconque Γ passant par A, B, C et recoupant les arêtes SA, SB, SC en α, β, γ. Montrer que :

1° Le sommet S, l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$, le point de concours des médianes du triangle ABC et le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre SABC sont en ligne droite;

2° Le sommet S, l'orthocentre du triangle ABC, le point de concours des médianes du triangle $\alpha\beta\gamma$ et le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$ sont en ligne droite.

V. Thébault.

2262. Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit I avec BC, CA, AB, et A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés d'un triangle ABC.

1° Calculer les distances du point φ de Feuerbach aux côtés du triangle;

2° Démontrer la relation

$$\varphi D \cos\frac{A}{2} = \varphi E \cos\frac{B}{2} + \varphi F \cos\frac{C}{2};$$

3° Montrer que la perpendiculaire sur AD menée du point commun à B_1C_1 et EF passe au milieu du rayon ID′ du cercle inscrit, D′ étant l'extrémité du diamètre DID′.

V. Thébault.

2263. Dans un triangle ABC, A_1, B_1, C_1 sont les milieux des côtés BC, CA, AB; D, E, F sont les contacts de ces côtés avec le cercle inscrit I, φ le point de Feuerbach et P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 les projections orthogonales de φ sur les côtés des triangles $A_1B_1C_1$ et DEF. Démontrer les relations :

1° $$\frac{\varphi A_1 \times \varphi B_1 \times \varphi C_1}{\varphi D \times \varphi E \times \varphi F} = \left(\frac{R}{2r}\right)^2;$$

2° $$\frac{\sin A}{\varphi P_1} + \frac{\sin B}{\varphi Q_1} + \frac{\sin C}{\varphi R_1} = 0;$$

3° $$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0.$$

V. Thébault.

2264. Démontrer que, si la tangente en P à une courbe (P) quelconque coupe les axes rectangulaires Ox et Oy en S et T, et si la tangente en la courbe (M), que décrit le milieu M de ST, coupe Ox et Oy en U et V, on a

$$\frac{MU}{MV} = \frac{PS}{PT},$$

et déduire de là une construction géométrique de la tangente UV quand le point P est donné et réciproquement.

M. d'Ocagne.

2265. Construire les foyers et les sommets de l'axe focal d'une conique dont on donne un point, le centre de courbure correspondant, et : 1° soit un axe; 2° soit le centre.

M. d'Ocagne.

2266. On considère toutes les conchoïdes d'une courbe (M) quelconque par rapport à un pôle O. Pour chaque position du rayon vecteur OM le lieu des centres de courbure répondant à toutes ces conchoïdes est une conique Γ dont on donnera une détermination géométrique complète. Reconnaître à quelle condition géométrique la conique Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, en remarquant qu'elle ne peut jamais être un cercle. Examiner spécialement le cas où la courbe (M) est une spirale d'Archimède de pôle O et déterminer dans ce cas les axes de la conique Γ. M. D'OCAGNE.

2267. Démontrer géométriquement que si la normale en un point M d'une parabole rencontre en N l'axe de cette courbe, en P la tangente au sommet, et si Q est le milieu de MN, le rayon de courbure en M est le double de PQ.

M. D'OCAGNE.

2268. Si, d'un point M pris sur une conique, on mène à cette courbe les trois normales MP, MQ, MR autres que la normale en M, le triangle PQR, inscrit à la conique donnée, est en temps circonscrit à une conique fixe (1). G. FONTENÉ.

2269. Étant donnée la courbe de Viviani représentée par les équations

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0, \qquad x^2+y^2-ax=0;$$

démontrer qu'une droite qui se déplace en s'appuyant sur cette courbe, sur l'axe Oz et en restant parallèle au plan xOy, rencontre constamment une seconde courbe de Viviani située sur une sphère à laquelle la droite reste tangente.

F. BALITRAND.

2270. Démontrer que le cône qui a pour sommet le point double d'une courbe de Viviani et pour base cette courbe est de révolution. F. BALITRAND.

---

(1) *Sur les propriétés des triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre* (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 579; *Revue de Mathématiques spéciales*, 1900, p. 473). Les triangles PQR ont déjà été considérés par M. WEILL (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 60).