NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur une conique associée au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 446-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__446_1>

[$K^1 2d$]

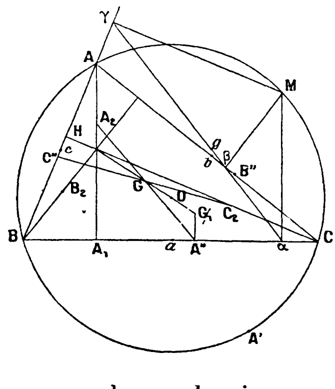
SUR UNE CONIQUE ASSOCIÉE AU TRIANGLE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Si un point décrit dans le plan d'un triangle ABC une courbe d'ordre quelconque, le lieu du centre de gravité de son triangle podaire par rapport à ce triangle est une courbe de même degré. Par suite, le centre de gravité g des projections α, β, γ d'un point variable M du cercle circonscrit au triangle sur les côtés BC, CA, AB décrit une conique Σ; cette conique est, d'ailleurs, toujours une ellipse.

Appelons H l'orthocentre du triangle, G le centre de

Fig. 1.



gravité, O le centre du cercle circonscrit, a, b, c les milieux des côtés, A_1 le pied de la hauteur AH (*fig.* 1). Lorsque le point M est au sommet A, g est le point A_2 situé au tiers de AA_1 à partir de A; quand M est le point A', diamétralement opposé au sommet A sur le cercle ABC, g est le point A' obtenu en prolongeant d'un tiers le segment $A_1 a$. Désignons par B_2 et C_2 les points analogues à A_2, obtenus en plaçant le point M aux sommets B et C, et par B'' et C'' les points analogues à A'', obtenus en prenant pour M les points diamétralement opposés à ces sommets sur le cercle ABC. On voit aisément que les droites A_2A'', B_2B'', C_2C'' se coupent au centre de gravité G et que ce point est le milieu de A_2A'', B_2B'', C_2C''.

L'ellipse Σ a pour centre le centre de gravité du triangle.

2. Appelons G_1 le symétrique de G par rapport à O; le point G_1 est aussi le symétrique de H par rapport à G et ses projections sur les côtés BC, CA, AB sont les points A'', B'', C''.

On sait d'autre part que, si l'on considère une droite d et que si l'on projette les sommets A, B, C sur cette droite, les perpendiculaires abaissées des points ainsi obtenus sur les côtés BC, CA, AB concourent en un point D *orthopôle* de d. Le point D est aussi le point d'intersection des droites de Simson, par rapport au triangle ABC, des points où la droite d rencontre le cercle ABC. M. Neuberg a montré (¹) que, si la droite d pivote autour d'un point P, son orthopôle décrit une conique passant par les projections de P sur les côtés

---

(¹) *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Academie royale de Belgique,* juillet-août 1910).

du triangle. Nous avons remarqué [1] que cette conique est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle et que son centre est le milieu de la droite qui joint le point P à l'orthocentre H. De ces considérations et du paragraphe précédent on déduit cette définition de la conique Σ :

L'ellipse Σ est aussi le lieu des orthopôles des droites qui passent par le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité.

En particulier :

L'ellipse Σ passe par l'orthopôle de la droite d'Euler.

En vertu de ce qui précède, on a aussi la proposition suivante :

L'ellipse Σ est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle.

3. Considérons (*fig.* 2) un point M du cercle ABC et le centre de gravité g de ses projections α, β, γ sur les côtés du triangle. Par chaque point de la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M passent les droites de Simson de deux autres points du cercle ABC ; la droite qui joint ces points reste, en vertu d'une propriété bien connue, perpendiculaire à la droite $\alpha\beta\gamma$.

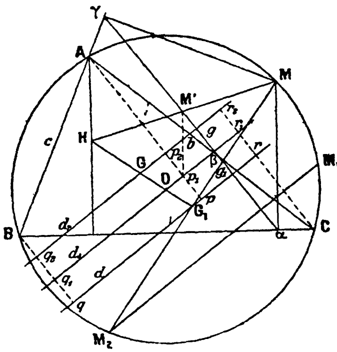
La droite $\alpha\beta\gamma$ coupe l'ellipse Σ en deux points dont l'un doit, d'après ce qui précède, être tel que les droites de Simson autres que $\alpha\beta\gamma$ qui y passent correspondent aux extrémités d'une corde du cercle ABC passant par G_1 ; nous allons montrer que c'est le point g.

---

(1) *Sur les ellipses tritangentes à l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Nouvelles Annales*, octobre 1913).

Appelons M' le milieu de HM; considérons les droites d, d_1, d_2 menées par G_1, O, G perpendiculairement à $\alpha\beta\gamma$ et désignons par p, p_1, p_2 les projections

Fig. 2.



de A sur d, d_1, d_2, par q, q_1, q_2 celles de B, par r, r_1, r_2 celles de C. Le point M' est l'orthopôle de d_1 et l'on a, en observant que M' et p_1 sont symétriques par rapport à bc,

$$\overline{M'\alpha} = \overline{Ap_1}, \qquad \overline{M'\beta} = \overline{Bq_1}, \qquad \overline{M'\gamma} = \overline{Cr_1}.$$

Or, comme la droite d_2 passe par G, on a

$$\begin{aligned}&\overline{Ap_2} + \overline{Bq_2} + \overline{Cr_2}\\ &\quad = \overline{Ap_1} + \overline{p_1p_2} + \overline{Bq_1} + \overline{q_1q_2} + \overline{Cr_1} + \overline{r_1r_2} = 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{p_1p} = \overline{p_2p_1} = \frac{1}{3}(\overline{Ap_1} + \overline{Bq_1} + \overline{Cr_1}) = \frac{1}{3}(\overline{M'\alpha} + \overline{M'\beta} + \overline{M'\gamma}).$$

On sait que l'orthopôle de d se déduit de l'orthopôle M' de d_1 par une translation égale à $\overline{p_1p}$. Or, la dernière relation montre que cette translation donne le point g. Nous avons donc démontré ce théorème :

Le centre de gravité g des projections α, β, γ d'un point M *du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés est l'orthopôle de la perpendiculaire menée par le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité sur la droite de Simson αβγ du point* M.

En particulier :

Le centre de gravité g correspondant au point M *dont la droite de Simson est perpendiculaire à la droite d'Euler est le milieu de la droite qui joint l'orthocentre au point* M ([1]).

4. La droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M rencontre l'ellipse Σ en un second point g_1 ; ce point est le centre de gravité des projections α_1, β_1, γ_1 d'un point M_1 du cercle circonscrit sur les côtés. Les développements qui précèdent permettent d'obtenir aisément ce point M_1 connaissant le point M; on pourra, d'ailleurs, déterminer le point g_1 sans construire le point M_1.

Par le point g_1 passent trois droites de Simson, celles de M et M_1 et celle d'un troisième point M_2 ; le triangle MM_1M_2 est le *triangle orthopolaire* du point g_1. Puisque le point g_1 est le centre de gravité des projections α_1, β_1, γ_1 de M_1 sur les côtés, le côté MM_2 opposé à M_1 dans le triangle orthopolaire doit, d'après le paragraphe précédent, passer par G_1. D'autre part, comme dans un triangle orthopolaire MM_1M_2 l'un des côtés est perpendiculaire à la droite de Simson du sommet opposé par rapport au

([1]) Cette propriété étant caractéristique pour cette droite de Simson, on peut la rapprocher de la question 4373 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1914, p. 75, 140, 185) se rapportant à cette droite.

triangle fondamental ABC, la droite $M_1 M_2$ est perpendiculaire à la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ du point M.

On a ainsi cette construction du point M_1 du cercle circonscrit auquel correspond le centre de gravité g_1, second point d'intersection de Σ avec la droite de Simson de M :

La droite qui joint le point M *au symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité recoupe le cercle circonscrit en* M_2; *la perpendiculaire menée par* M_2 *à la droite de Simson de* M *passe par* M_1.

D'autre part, le point g_1 est l'orthopôle de la droite $M_1 M_2$; il se déduit donc aisément de l'orthopôle g de la droite d. Le segment gg_1 est, en effet, égal à la distance de la droite d à $M_1 M_2$, donc égal et de sens contraire à la distance de M_2 à d.

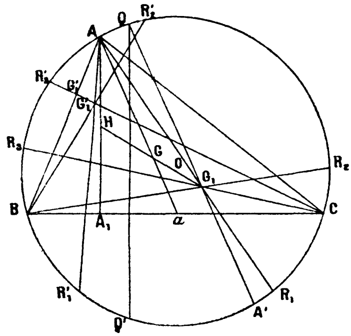
Si l'on prend sur la droite de Simson du point M, *à partir de* g, *un segment égal et de sens contraire à la distance de* M_2 *à la droite* d, *le point* g_1 *ainsi obtenu est le second point d'intersection de la droite de Simson du point* M *avec l'ellipse* Σ.

5. Les points d'intersection de l'ellipse Σ avec les côtés autres que A'', B'', C'' s'obtiennent aisément en utilisant soit la définition de la conique trouvée au paragraphe 2, soit le théorème que nous venons d'énoncer.

La droite qui joint le point A', diamétralement opposé au sommet A sur le cercle ABC, au point G_1 recoupe ce cercle en un point Q dont la projection sur BC est un point de Σ, car la droite de Simson de A' n'est autre que le côté BC (*fig.* 3). Or, la droite $A'G_1$

est parallèle à la médiane Aa, et, comme l'angle AQA' est droit, QA est perpendiculaire à Aa. On obtient

Fig. 3.



donc cette construction simple des seconds points d'intersection de Σ avec les côtés :

Les perpendiculaires élevées aux sommets sur les médianes coupent le cercle circonscrit en trois points dont les projections sur les côtés correspondants sont les seconds points d'intersection de Σ avec les côtés.

Soit Q' le point où la perpendiculaire abaissée de Q sur BC recoupe le cercle ABC. Si l'on tient compte de la première définition de la conique Σ, on voit que *la droite* Q'A' *est le lieu des points tels que les centres de gravité de leurs triangles podaires appartiennent à* BC. Cette droite coupe le côté BC sur la polaire trilinéaire du centre du cercle circonscrit.

La droite de Simson de Q' est, d'après une propriété bien connue, parallèle à AQ, et par suite perpendiculaire à la médiane Aa. On a donc la proposition suivante :

Les droites de Simson d'un triangle perpendiculaires aux médianes sont telles que leur point d'intersection avec l'un des côtés du triangle est le milieu de la distance des points d'intersection avec les deux autres côtés.

6. Appelons R_1, R_2, R_3 les points où les droites AG_1, BG_1, CG_1 recoupent le cercle ABC. La droite de Simson de R_1 coupe la hauteur AH en un point de Σ puisque cette hauteur est la droite de Simson du sommet A. On déduit de là cette construction des points d'intersection autres que A_2, B_2, C_2 des hauteurs avec la conique Σ :

Les points obtenus en portant, à partir de l'orthocentre, sur les hauteurs des segments égaux et de sens contraires aux distances de R_1, R_2, R_3 *aux côtés correspondants sont des points de* Σ.

Les points ainsi obtenus sont, en vertu du paragraphe 4, les centres de gravité relatifs aux droites de Simson des points R'_1, R'_2, R'_3 où les parallèles menées par R_1, R_2, R_3 aux côtés BC, CA, AB recoupent le cercle ABC.

Les droites AR'_1, BR'_2, CR'_3 sont donc les lieux des points tels que les centres de gravité de leurs triangles podaires par rapport au triangle ABC appartiennent aux hauteurs AH, BH, CH; elles concourent en un point G'_1, inverse triangulaire de G_1. On déduit de cette remarque le théorème suivant :

L'orthocentre est le centre de gravité du triangle podaire de l'inverse du symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité.