

JOSEPH JOFFROY

**Nouveau théorème relatif à des
circonférences tangentes**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 440-446

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__440_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'11e]

NOUVEAU THÉORÈME
RELATIF A DES CIRCONFÉRENCES TANGENTES;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Je veux démontrer d'abord, par la Géométrie élémentaire, un théorème connu qui a été établi par des calculs algébriques. On sait que huit circonférences sont tangentes à trois cercles et forment quatre couples. Ce théorème peut s'énoncer :

La ligne des centres de chaque couple passe par le centre radical des trois cercles, et le rapport des distances de ce point aux deux centres égale le rapport des rayons des circonférences du couple.

Pour la concision, je désignerai souvent les circonférences par leurs rayons.

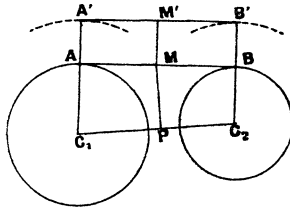
1. Je vais prouver que les centres radicaux des cercles $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$ sont tous sur la même droite (R_1 , R_2 , R_3 étant constants, h variant de $-\infty$ à $+\infty$).

Figure 1. — Je trace AB tangente extérieure à R_1 , R_2 , A'B' tangente extérieure à $R_1 + h$, $R_2 + h$, M, M' leurs milieux.

Je suppose que h augmente proportionnellement au temps, M décrit la perpendiculaire à AB d'un mouve-

ment uniforme; MC , perpendiculaire à C_1C_2 et axe radical, a donc un mouvement uniforme dans le

Fig. 1.



sens C_1C_2 . Le centre radical des trois cercles $R_1 + h$, $R_2 + h$, $R_3 + h$ ayant trois mouvements composés rectilignes et uniformes, a un mouvement résultant uniforme sur une droite. C. Q. F. D.

2. Le centre O_1 de la circonférence de rayon ρ_1 tangente à R_1, R_2, R_3 sans les envelopper est sur cette droite, car O_1 étant un point commun aux trois circonférences $R_1 + \rho_1, R_2 + \rho_1, R_3 + \rho_1$ est leur centre radical.

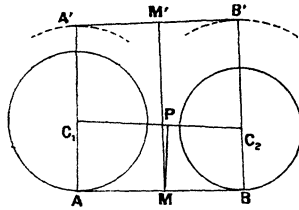
3. Le centre O'_1 de la circonférence de rayon ρ'_1 tangente à R_1, R_2, R_3 et les enveloppant est sur la même droite.

Démonstration. — O'_1 étant un point commun aux circonférences $\rho'_1 - R_1, \rho'_1 - R_2, \rho'_1 - R_3$ est leur centre radical; il est sur le lieu des centres radicaux des circonférences $h - R_1, h - R_2, h - R_3$, lieu qui est une droite, la même que la précédente, ce que je dois prouver.

Figure 2. — Soient AB tangente extérieure aux cercles R_1, R_2 ; $AA' = BB' = h$; M, M' leurs milieux, MP

perpendiculaire à C_1, C_2 ; c'est l'axe radical, sa vitesse suivant C_1, C_2 est la même que ci-dessus pour les mêmes

Fig. 2.

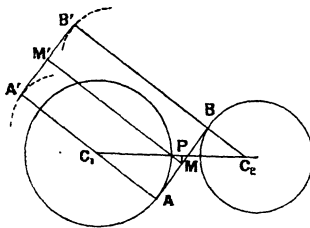


raisons. Les centres radicaux des trois circonférences variables sont donc sur une droite, la même que celle du n° 1.

4. Il faut et il suffit que j'étudie maintenant un quelconque des trois autres couples de circonférences tangentes à trois cercles.

Figure 3. — Soient les circonférences $h - R_1$, $h + R_2$; je trace la tangente intérieure AB aux cer-

Fig. 3.



cles R_1, R_2 ; $AA' = h = BB'$; M, M' les milieux de $AB, A'B$; MP l'axe radical.

Le raisonnement des numéros précédents me conduit à cette conclusion : l'axe radical se meut uniformément suivant $C_2 C_1$, le lieu des centres radicaux des

trois circonférences $h - R_1$, $h + R_2$, $h + R_3$ est une droite (nouvelle).

5. Le centre de la circonférence ρ_2 tangente à R_1 en l'enveloppant, et à R_2 , R_3 sans les envelopper, est sur cette droite parce qu'il est leur centre radical (comme étant un point commun aux circonférences $\rho_2 - R_1$, $\rho_2 + R_2$, $\rho_2 + R_3$).

6. Les centres radicaux des circonférences $h + R_1$, $h - R_2$, $h - R_3$ sont sur la droite précédente (pour la démonstration, tracer l'autre tangente intérieure, et raisonner comme au n° 4).

7. Le centre de la circonférence tangente à R_1 , R_2 , R_3 sans envelopper R_1 et enveloppant R_2 , R_3 est sur cette droite (on le démontrera aisément aussi).

Le troisième et le quatrième couple de lignes de centre des circonférences tangentes à R_1 , R_2 , R_3 ont les propriétés du deuxième couple (c'est évident).

8. Soient K le centre radical des cercles R_1 , R_2 , R_3 ; O_1 , O'_1 , ρ_1 , ρ'_1 les centres et les rayons des deux circonférences tangentes d'un des quatre couples que j'étudie.

Puisque K se meut proportionnellement à h sur la droite $O_1 O'_1$, j'ai la proportion $\frac{KO_1}{KO'_1} = \frac{\rho'}{\rho_1}$, rapport des deux valeurs qu'a h lorsque K passe en O_1 et O'_1 .

Je puis, maintenant, établir mon théorème par la plus simple géométrie.

Il est nécessaire, pour la clarté et la concision, que j'adopte une notation nouvelle pour désigner les huit circonférences tangentes à trois cercles :

C'_1 sera une circonférence tangente à C_1 et ne l'enveloppant pas;

(C'_1) sera une circonférence tangente à C_1 et l'enveloppant;

$C'_1(C'_2 C'_3)$ sera la circonférence tangente aux trois cercles C_1, C_2, C_3 enveloppant C_2, C_3 seulement;

$(C'_1)C'_2 C'_3$ la circonférence tangente n'enveloppant que C_1 ;

$[C'_1 C'_2 C'_3] [(C'_1 C'_2 C'_3)]$ la ligne des centres du premier couple de circonférences tangentes étudié plus haut;

$[C'_1 (C'_2 C'_3)] [(C'_1) C'_2 C'_3]$ la ligne des centres du deuxième couple de circonférences tangentes.

Voici, enfin, l'exposition de propriétés qui ont fait le sujet d'une première Note de moi insérée en octobre 1888 dans la 3^e série des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Note incomplète contenant des *errata* et des erreurs.

Soient quatre cercles R_1, R_2, R_3, R_4 .

Je considère les quatre groupes de trois cercles, tour à tour.

En K_1 , en K_2 , en K_3 , en K_4 concourent quatre lignes de centre de circonférences tangentes à trois des quatre cercles. Voilà donc quatre faisceaux de quatre droites, faisceaux connus (*fig. 4*).

Voici l'énoncé de mon théorème :

Ces seize lignes de centre forment cinq autres faisceaux de quatre droites.

Démonstration. — Soient les quatre lignes de centre

$$a = [C'_1 C'_2 C'_3] (C_1 C_2 C_3), \quad b = [C'_2 C'_3 C'_4] [(C'_2 C'_3 C'_4)],$$

$$c = [C'_3 C'_4 C'_1] [(C'_3 C'_4 C'_1)], \quad d = [C'_4 C'_1 C'_2] [(C'_4 C'_1 C'_2)],$$

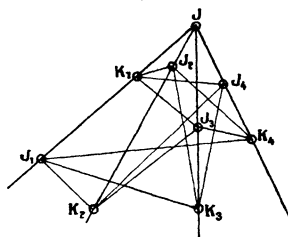
c et d concourent au point J commun aux deux premières a, b , car les tangentes menées de ce point aux quatre circonférences $R_1 + h, R_2 + h, R_3 + h, R_4 + h$ sont égales.

Soient les quatre lignes de centre

$$\begin{aligned} a' &= [C_1^t (C_2^t C_3^t)] [(C_1^t) C_2^t C_3^t], & b' &= [C_1^t (C_3^t C_4^t)] [(C_1^t) C_3^t C_4^t], \\ c' &= [C_1^t (C_3^t C_4^t)] [(C_1^t) C_3^t C_4^t], & d' &= [C_2^t C_3^t C_4^t] [(C_2^t C_3^t C_4^t)]. \end{aligned}$$

De J_1 , point commun aux droites a', b' , partent des tangentes aux quatre cercles $R_1 + h, R_2 + h, R_3 + h$.

Fig. 1.



$R_4 + h$ qui sont égales. Du point commun à c' et d' partent les mêmes tangentes. Donc, ce second point est aussi le point J_1 .

Le lecteur remarquera que C_1^t figure dans les noms des trois premières lignes et pas dans la quatrième.

En remplaçant C_1^t par C_2^t , par C_3^t , par C_4^t et, de plus, C_2^t par C_3^t , C_3^t par C_4^t , C_4^t par C_1^t dans les noms du deuxième faisceau, on écrira les noms de trois autres faisceaux ayant pour centres J_2, J_3, J_4 (analogues au deuxième).

Remarque. — Sur chaque ligne du faisceau J est le centre d'un des quatre autres faisceaux J_1, J_2, J_3, J_4 , plus le centre d'un des quatre faisceaux K_1, K_2, K_3, K_4

qui étaient connus, plus deux centres de circonférences tangentes. Il y a donc, sur chaque droite du faisceau de centre J, cinq points remarquables.