R. GOORMAGHTIGH

Sur la transformation par aires constantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 393-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__393_0>

[P[1]6f]

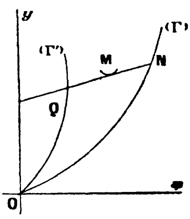
SUR LA TRANSFORMATION PAR AIRES CONSTANTES (¹);

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — SUR CERTAINES AIRES CONSTANTES.

1. *Théorème fondamental.* — Considérons (*fig.* 1) un système d'axes rectangulaires xOy et deux courbes

Fig. 1.



(Γ) et (Γ') d'équations $x = f(y)$ et $x = \psi(y)$ passant par l'origine. Soient N un point variable de (Γ) et Q un point variable de (Γ') tels que l'aire du triangle

(¹) *Extrait d'une lettre de l'auteur.* — La transformation géométrique que je désigne sous le nom de *Transformation par aires constantes* m'a conduit à des résultats généraux concernant une transformation simple, celle par hyperbolisme. J'ai pu ainsi obtenir, entre autres, une construction simple du centre de courbure des conchoïdes de Külp que j'ai signalées à l'attention des lecteurs (*Nouv Ann.*, 1913) et dont MM. d'Ocagne, Bouvaist et Balitrand se sont ensuite occupés.

J'avais, d'ailleurs, préparé ce travail avant la publication de la Note de M. Balitrand, quand j'étais encore en Belgique. Ce sont les circonstances actuelles qui m'ont empêché, à mon grand regret, de vous le communiquer plus tôt.

mixtiligne ONQ soit constante et égale à a^2. Si l'on désigne par β et β' les ordonnées des points N et Q et par λ celle du point où NQ rencontre l'axe Oy, cette condition s'exprime par

$$\int_0^\beta f(y)\,dy - \frac{1}{2}(\beta-\lambda)f(\beta)$$
$$-\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2}(\beta'-\lambda)\psi(\beta') = a^2,$$

ou

$$(1)\quad 2\int_0^\beta f(y)\,dy - 2\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy - \beta f(\beta)$$
$$+\beta'\psi(\beta') + \lambda[f(\beta)-\psi(\beta')] = 2a^2.$$

L'équation de NQ étant

$$(2)\quad [f(\beta)-\psi(\beta')]y - (\beta-\beta')x = \beta' f(\beta) - \beta\psi(\beta'),$$

on a

$$\lambda = \frac{\beta' f(\beta) - \beta\psi(\beta')}{f(\beta)-\psi(\beta')};$$

la relation (1) s'écrit donc

$$(3)\quad 2\int_0^\beta f(y)\,dy - 2\int_0^{\beta'} \psi(y)\,dy$$
$$-(\beta-\beta')[f(\beta)+\psi(\beta')] = 2a^2.$$

Pour calculer l'abscisse du point où NQ touche son enveloppe dérivons (2) par rapport à β. En appelant $f'(\beta)$ et $\psi'(\beta')$ les dérivées

$$\frac{df(y)}{d\beta},\quad \frac{d\psi(y)}{d\beta'},$$

il vient

$$(4)\quad \left[f'(\beta)-\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right]y - \left(1-\frac{d\beta'}{d\beta}\right)x$$
$$= \frac{d\beta'}{d\beta}f(\beta) + \beta' f'(\beta) - \psi(\beta') - \beta\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}.$$

En résolvant le système formé par les équations (2) et (4) par rapport à x, on trouve pour l'abscisse ξ cherchée une fraction ayant pour numérateur

$$\begin{aligned}N \equiv (\beta'-\beta)\psi(\beta')f'(\beta) - (\beta'-\beta)f(\beta)\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - \psi^2(\beta')\\ - f^2(\beta)\frac{d\beta'}{d\beta} + f(\beta)\psi(\beta')\left(1+\frac{d\beta'}{d\beta}\right)\end{aligned}$$

et pour dénominateur

$$\begin{aligned}D \equiv \left[f'(\beta) - \psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right](\beta'-\beta)\\ + \left(1-\frac{d\beta'}{d\beta}\right)[f(\beta)-\psi(\beta')].\end{aligned}$$

Or, si l'on dérive (3) par rapport à β, on trouve la relation

$$\begin{aligned}(5)\qquad \left(1+\frac{d\beta'}{d\beta}\right)[f(\beta)-\psi(\beta')]\\ + (\beta'-\beta)\left[f'(\beta)-\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right] = 0,\end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned}(\beta'-\beta)\left[f'(\beta)-\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}+2\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}\right]\\ + [f(\beta)-\psi(\beta')]\left(1-\frac{d\beta'}{d\beta}+2\frac{d\beta'}{d\beta}\right) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit

$$D = 2\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}(\beta-\beta') - 2[f(\beta)-\psi(\beta')]\frac{d\beta'}{d\beta}.$$

Mais la relation (5) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\left[(\beta'-\beta)f'(\beta)+f(\beta)\left(1+\frac{d\beta'}{d\beta}\right)\right]\psi(\beta)\\ = \psi^2(\beta') + \psi^2(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - (\beta'-\beta)\psi(\beta')\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}.\end{aligned}$$

Dès lors

$$N = \psi^2(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - (\beta'-\beta)\psi(\beta')\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta}$$
$$-(\beta'-\beta)f(\beta)\psi'(\beta')\frac{d\beta'}{d\beta} - f^2(\beta)\frac{d\beta'}{d\beta},$$

ou encore

$$N = \left\{(\beta-\beta')\psi'(\beta') - [f(\beta)-\psi(\beta')]\frac{d\beta'}{d\beta}\right\}[f(\beta)+\psi(\beta')].$$

Par suite

$$\xi = \frac{1}{2}\Big[f(\beta)+\psi(\beta')\Big].$$

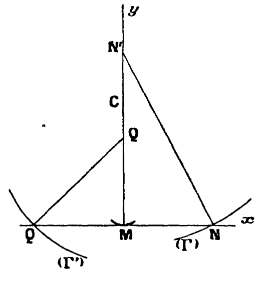
On en déduit le théorème suivant :

Lorsqu'une droite NQ *s'appuyant en* N *et* Q *sur deux courbes fixes forme avec ces courbes un triangle mixtiligne d'aire constante, cette droite touche son enveloppe au milieu du segment* NQ.

2. *Centre de courbure de l'enveloppe.* — Quelques considérations de Géométrie intrinsèque conduisent à la construction du centre de courbure de l'enveloppe au point M, milieu de NQ.

Prenons (*fig.* 2) comme système d'axes coordonnées

Fig. 2.



mobiles la tangente et la normale à l'enveloppe en M.

Si les coordonnées de N et de Q sont respectivement $(k, 0)$ et $(-k, 0)$ et si ρ désigne le rayon de courbure de l'enveloppe en M, les formules de Cesàro [1] donnent pour le point N

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dk}{ds} + 1, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{k}{\rho},$$

et, pour le point Q,

$$\frac{\delta x}{ds} = -\frac{dk}{ds} + 1, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{k}{\rho}.$$

Si donc on appelle θ_1 et θ_2 les angles de QN avec les normales à (Γ) et (Γ') en N et Q, on a

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{-\dfrac{dk}{ds} + 1}{\dfrac{k}{\rho}}, \qquad \operatorname{tang}\theta_2 = -\frac{\dfrac{dk}{ds} + 1}{\dfrac{k}{\rho}};$$

d'où

$$k \operatorname{tang}\theta_1 - k \operatorname{tang}\theta_2 = 2\rho.$$

On en déduit cette construction [2] :

La normale en M *à l'enveloppe rencontre en* N' *et* Q' *celles à* (Γ) *et* (Γ') *en* N *et* Q. *Le centre de courbure est le milieu de* Q'N'.

3. *Exemple.* — Un cas simple est celui où l'on considère les paraboles

$$y^2 = \pm 2px.$$

---

(1) CESARO, *Natürliche Geometrie*, p. 21.

(2) Plus généralement on démontrerait de la même manière que si la tangente en un point M d'une courbe rencontre deux courbes (Γ) et (Γ') aux points N et Q tels que le rapport MN : MQ soit constant, le centre de courbure C de la première courbe en M divise dans le même rapport le segment déterminé sur MC par les normales en N et Q aux courbes (Γ) et (Γ').

Alors la condition (3) devient

$$(6)\qquad \frac{\beta^3}{3p}+\frac{\beta'^3}{3p}-\frac{1}{2p}(\beta-\beta')(\beta^2-\beta'^2)=2a^2.$$

D'autre part, si ξ et η désignent les coordonnées du milieu de NQ,

$$(7)\qquad \xi=\frac{\beta^2-\beta'^2}{2p},\qquad \eta=\frac{\beta+\beta'}{2}.$$

On en déduit successivement

$$\xi=\frac{(\beta+\beta')(\beta-\beta')}{4p}=\frac{\eta(\beta-\beta')}{2p},\qquad \beta-\beta'=\frac{2p\xi}{\eta},$$

$$(8)\qquad \beta\beta'=\frac{\eta^4-p^2\xi^2}{\eta^2}.$$

Or, la relation (6) s'écrit encore

$$2(\beta+\beta')(\beta^2-\beta\beta'+\beta'^2)-3(\beta-\beta')^2(\beta+\beta')=12a^2p,$$

ou

$$2\eta(\beta^2+\beta'^2-4\beta\beta')=-12a^2p,$$

ou enfin, en tenant compte de (7) et (8),

$$\eta^4-3p^2\xi^2=3pa^2\eta.$$

L'enveloppe de la droite NQ est donc la quartique

$$y^4-3p^2x^2=3pa^2y.$$

Dans le cas où a^2 est nul, l'origine fait partie de l'enveloppe, ce qui est évident.

L'enveloppe proprement dite se compose des deux paraboles

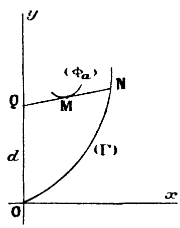
$$y^2=\pm px\sqrt{3}.$$

4. Le cas où (Γ') est l'axe Oy est particulièrement intéressant. La transformation qui sert à passer de (Γ) aux enveloppes correspondantes jouit de propriétés remarquables qui font l'objet des développements qui vont suivre. Nous réserverons à ce cas important le nom de *Transformation par aires constantes d'une courbe*.

II. — La transformation par aires constantes.

5. Considérons (*fig.* 3) une courbe (Γ) et une droite d se rencontrant en un point O. Soient N un

Fig. 3.



point variable sur la courbe et Q un point variable de d tels que l'aire du triangle mixtiligne NOQ soit constante et égale à a^2. Désignons l'enveloppe de la droite NQ par (Φ_a).

Prenons la droite d pour axe des y, la perpendiculaire en O pour axe des x. Si (α, β) sont les coordonnées de N et si λ est l'ordonnée de Q, la condition d'aires s'exprime par la relation

$$\int_0^\beta x\,dy - \frac{1}{2}\alpha(\beta - \lambda) = a^2,$$

qui donne

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}\left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right).$$

Dès lors, l'équation de NQ s'écrit

$$x = \frac{\alpha}{2\int_0^\beta x\,dy - 2a^2}\left[\alpha y - \left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right)\right],$$

ou

$$(9) \qquad \alpha^2 y - 2\left(\int_0^\beta x\,dy - a^2\right)x = \alpha\left(2a^2 + \alpha\beta - 2\int_0^\beta x\,dy\right).$$

En dérivant par rapport à β, on obtient

$$(10) \qquad 2\alpha\frac{d\alpha}{d\beta}y - 2\alpha x = 2a^2\frac{d\alpha}{d\beta} - \alpha^2 + 2\alpha\beta\frac{d\alpha}{d\beta} - 2\frac{d\alpha}{d\beta}\int_0^\beta x\,dy.$$

La résolution du système formé par les équations (9) et (10) donne

$$(11) \qquad x = \frac{1}{2}\alpha,$$

résultat qui renferme le théorème du paragraphe 1, appliqué au cas qui nous occupe.

Désignons les coordonnées courantes pour l'enveloppe (Φ_a) par ξ et η. En portant la relation (11) dans l'équation (9), il vient successivement

$$4\xi^2\eta - 2\left(\int_0^\beta x\,dy - a^2\right)\xi = 4\xi\left(a^2 + \beta\xi - \int_0^\beta x\,dy\right),$$

$$2\xi\eta + \int_0^\beta x\,dy - 2\beta\xi = a^2.$$

D'où, en intégrant par parties,

$$\int_0^\alpha y\,dx = 2\xi\eta - a^2.$$

Si donc l'équation de (Γ) est

$$y = f(x),$$

celle de (Φ_a) sera

$$\int_0^{2\xi} f(2\xi)\, d(2\xi) = 2\xi\eta - a^2,$$

ou, en reprenant x et y comme coordonnées courantes,

$$\int_0^{2x} f(x)\, dx = 2xy - a^2. \tag{12}$$

En particulier, la courbe (Φ_0) a pour équation

$$\int_0^{2x} f(x)\, dx = 2xy. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ne changent pas quand on déplace l'axe des x parallèlement à lui-même. On pourra donc encore les employer dans le cas où d est une asymptote de (Γ), l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote étant finie.

De plus, on voit aisément que, si les axes font entre eux un angle θ, les équations subsistent si l'on désigne la constante par $a^2 \sin\theta$.

6. *Construction du centre de courbure de* (Φ_a). — Cette construction résulte immédiatement du théorème général du paragraphe 2 :

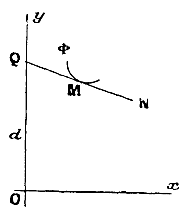
La normale à (Φ_a) *en* M *rencontre en* Q' *et* N' *la perpendiculaire en* Q *à* d *et la normale en* N *à* (Γ). *Le centre de courbure est le milieu de* Q'N'.

Un cas simple est celui où (Γ) est une droite. On sait qu'alors les transformées par aires constantes sont des hyperboles ayant (Γ) et d pour asymptotes. On a donc cette construction du *centre de courbure* au point M d'une *hyperbole :*

La tangente en M *coupe les asymptotes en* N *et* Q ; *la normale en* M *rencontre les perpendiculaires élevées en* N *et* Q *sur les asymptotes aux points* N′ *et* Q′. *Le centre de courbure est le milieu de* N′Q′.

7. Inversement, soit $y = \varphi(x)$ l'équation d'une

Fig. 4.



courbe (Φ) (*fig.* 4). Celle de la tangente au point $M(\xi, \eta)$ sera

$$y - \varphi(\xi) = \varphi'(\xi)(x - \xi),$$

et le symétrique N du point Q où cette tangente coupe Oy, par rapport à M, a pour coordonnées

$$2\xi, \quad \varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi).$$

L'équation du lieu (Γ) de ce point s'écrit donc

$$y = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe (Γ) est donc affine à la courbe

$$(14) \qquad y = \frac{dx\varphi(x)}{dx},$$

l'axe d'affinité étant Oy et le rapport 2 : 1.

Il est aisé de voir au moyen de cette dernière équation que, quelle que soit la courbe (Φ), l'aire comprise entre NQ, l'axe Oy et la courbe (Γ) est constante.

En outre, la méthode du paragraphe précédent donne la construction de la tangente en N à (Γ) quand on connaît le centre de courbure de (Φ) en M.

8. La forme (14) de l'équation du lieu de N permet de distinguer dans quels cas l'aire constante est nulle ou non. Si l'on applique l'équation (12) à la courbe affine de (14), on trouve

$$2[x\varphi(x)]_{x=0} = a^2.$$

Si donc, pour $x = 0$, $\varphi(x)$ est fini, a^2 est nul et la courbe (Φ) est une courbe (Φ_0) pour (Γ).

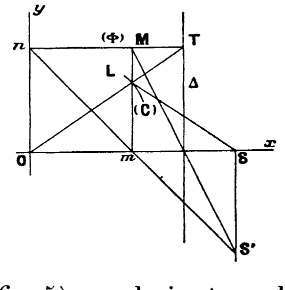
Si $\varphi(x)$ tend vers l'infini pour $x = 0$, $x\varphi(x)$ peut tendre vers une quantité finie; alors a^2 n'est pas nul et la courbe (Φ) est une courbe (Φ_a) pour (Γ).

Si $x\varphi(x)$ tend vers l'infini, l'aire du triangle mixtiligne considérée au paragraphe 5 est infinie et la recherche de l'enveloppe de NQ n'a pas de signification.

III. — Les hyperbolismes.

9. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe (C).

Fig. 5.



Considérons (*fig.* 5) une droite Δ parallèle à l'axe Oy, d'équation $x = b$. Une droite variable $y = mx$ menée par l'origine rencontre (C) en un point L et Δ en un point T. Les parallèles menées aux axes Ox, Oy respectivement par T et L se coupent en un point M dont le lieu (Φ) est l'*hyperbolisme* de (C) ([1]).

Pour la facilité nous appellerons O et Δ le *pôle* et l'*axe* de la transformation et (C) l'*anti-hyperbolisme* de (Φ).

Les coordonnées du point T étant (b, mb) l'équation de (Φ) sera

$$f\left(x, \frac{xy}{b}\right) = 0. \tag{15}$$

Inversement si $y = \psi(x)$ est l'équation de (Φ) celle de (C) sera

$$y = \frac{x}{b}\,\psi(x). \tag{16}$$

Les équations qui précèdent, comme le raisonnement direct, montrent que les hyperbolismes d'une courbe (C) pour un même pôle et des axes parallèles sont des courbes affines, l'axe Ox étant l'axe d'affinité. En outre, si deux courbes sont affines, l'axe d'affinité étant Ox, leurs hyperbolismes pour des pôles et des axes identiques sont aussi affines ([2]).

10. Considérons maintenant trois axes rectangulaires Oxyz, le cylindre

$$f(x, z) = 0 \tag{17}$$

([1]) G. Loria, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 20.

([2]) Ainsi les *conchoïdes de Külp généralisées* que nous avons définies (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 196) comme hyperbolismes d'une ellipse quand le pôle est le centre et l'axe la tangente en l'un des sommets peuvent être considérées comme hyperbolismes d'un cercle quand le pôle est au centre et l'axe quelconque (*cf.* § 11).

et le paraboloïde hyperbolique équilatère

$$(18) \qquad xy = bz.$$

L'élimination de z entre les équations (17) et (18) donne l'équation (15).

Par suite, *l'hyperbolisme* (Φ) *d'une courbe* (C) *est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du paraboloïde hyperbolique équilatère* (18) *et du cylindre parallèle à l'axe y dont la section par le plan xz est une courbe égale à* (C).

On en déduit une construction de la tangente en M à l'hyperbolisme (Φ) quand on connaît celle en L à (C).

L'un des systèmes de génératrices de l'hyperboloïde (18) est formé par des droites qui s'appuient sur l'axe x et sont parallèles au plan yz, l'autre par des droites qui s'appuient sur l'axe y et sont parallèles au plan xz. Si donc on appelle m et n les projections de M sur Ox et Oy, la droite mn est la trace, dans le plan xy, du plan tangent au paraboloïde au point qui se projette en M sur xy.

Soient encore S le point où la tangente en L à (C) rencontre l'axe Ox, SS′ la parallèle menée par S à Oy, S′ le point où cette parallèle rencontre mn. La droite SS′ est la trace du plan tangent au cylindre (17) le long de la génératrice qui se projette sur xy suivant Mm. Le point S′ appartient donc à la tangente en M à l'hyperbolisme (Φ). On en déduit cette construction :

On projette M *en m et n sur* Ox *et* Oy; *la tangente à* (C) *en* L *coupe* Ox *en* S; *l'intersection de mn avec la parallèle menée par* S *à* Oy *est un point de la tangente en* M *à l'hyperbolisme* [1].

---

[1] Cette construction généralise celle que nous avons donnée pour la conchoïde de Külp (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 194).

11. *Hyperbolismes du cercle* (¹). — Si AA′ et BB′ sont deux diamètres rectangulaires d'un cercle de centre ω, l'hyperbolisme du cercle pour le pôle A et un axe parallèle à BB′ est une *cubique d'Agnesi* (²); pour le pôle B ou B′ et un axe parallèle à BB′, l'hyperbolisme est une *serpentine de Newton*. Quand le pôle est en ω et l'axe parallèle à BB′, il est aisé de voir que les hyperbolismes ne sont autres que les quartiques que nous avons désignées sous le nom de *conchoïdes de Külp généralisées* (³).

12. *Anti-hyperbolismes du cercle*. — Si la courbe (Φ) est le cercle

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

la courbe (C) est, d'après l'équation (16), la *lemniscate de Gerono* (⁴)

$$x^4 = b^2(x^2 - y^2).$$

On a donc cette description de la lemniscate de Gerono :

La lemniscate de Gerono est l'anti-hyperbolisme d'un cercle quand le pôle de la transformation est le centre et l'axe une tangente.

Considérons de même comme courbe (Φ) le cercle

$$y = \sqrt{x(b-x)},$$

dont Ox est un diamètre et qui touche Oy et Δ.

(¹) Les hyperbolismes du cercle sont des cubiques quand le pôle est sur la courbe, des quartiques dans le cas contraire.

(²) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 81.

(³) Voir *Nouvelles Annales*, 1913, p. 196.

(⁴) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 186.

D'après l'équation (16), son anti-hyperbolisme est

$$y = \frac{x}{b}\sqrt{b-x}, \tag{19}$$

ou

$$x^4 - bx^3 + b^2y^2 = 0. \tag{20}$$

Cette courbe est une *courbe piriforme*, d'après la dénomination de G. de Longchamps ([1]).

Nous allons montrer qu'on peut obtenir la *cissoïde* comme hyperbolisme de la courbe piriforme (20). Si l'on déplace l'origine au point $(b, 0)$ et si l'on renverse le sens de l'axe x, l'équation (19) devient

$$y = \frac{b-x}{x}\sqrt{x(b-x)}.$$

Si donc on prend l'hyperbolisme de cette courbe, le pôle étant la nouvelle origine et l'axe l'ancien axe des y, on obtient, d'après l'équation (15), la courbe

$$y = (b-x)\sqrt{\frac{b-x}{x}}.$$

C'est une cissoïde.

Ainsi, *le cercle et la cissoïde sont des hyperbolismes de la courbe piriforme* (20).

IV. — Rapport entre les deux transformations.

13. Reprenons la courbe (Γ) d'équation $y = f(x)$. La courbe affine, le rapport d'affinité étant $1 : 2$ et l'axe d'affinité Oy, sera

$$y = f(2x).$$

Considérons maintenant les courbes intégrales de

([1]) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 203.

celle-ci [1], le pôle utilisé dans cette transformation étant le point O′ $(-b, o)$. Elles ont pour équation

$$y = \frac{1}{b}\int_0^x f(2x)\,dx + q,$$

où q désigne la constante arbitraire. Cette équation s'écrit encore

$$(21) \qquad y = \frac{1}{2b}\int_0^{2x} f(x)\,dx + q.$$

D'autre part, d'après l'équation (15), l'hyperbolisme de (21) est

$$\frac{xy}{b} = \frac{1}{2b}\int_0^{2x} f(x)\,dx + q$$

ou

$$\int_0^{2x} f(x)\,dx = 2xy - 2bq.$$

Nous retrouvons donc l'équation (12) des transformations par aires constantes (Φ_a) de la courbe (Γ).

Les transformées par aires constantes d'une courbe (Γ) *sont les hyperbolismes des courbes intégrales d'une courbe affine de* (Γ).

Il est utile d'observer que [2]

$$2bq = a^2.$$

Inversement, si l'on part d'une courbe (Φ) d'équation $y = \varphi(x)$, l'anti-hyperbolisme est, d'après l'équation (16),

$$(22) \qquad y = \frac{x}{b}\,\varphi(x).$$

---

(1) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 332.
(2) *Voir* § 19.

La courbe différentielle de (22) est

$$y = \frac{dx\,\varphi(x)}{dx}$$

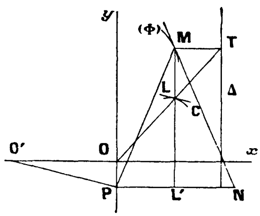
si l'on prend pour pôle de cette transformation le point $O'(-b, o)$. On retrouve donc l'équation (14). Par conséquent :

La courbe (Γ) *est affine à la courbe différentielle de l'anti-hyperbolisme de* (Φ).

14. Les développements qui précèdent conduisent à une *nouvelle construction de la tangente à l'hyperbolisme d'une courbe* [1].

Appelons (*fig.* 6) P le point où la parallèle menée

Fig. 6.



par O' à la tangente en L à (C) rencontre Oy et L' le point correspondant à L sur la courbe différentielle. D'après ce qui précède, le symétrique N de P par rapport à L' décrit la courbe (Γ), et N appartient à la tangente en M à la courbe (Φ). On en déduit la construction suivante :

Par le point O' *symétrique du pied de* Δ *par rapport à* O *on mène une parallèle à la tangente*

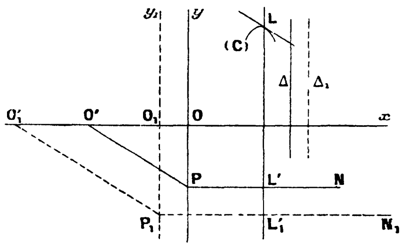
[1] Cette construction généralise celle que nous avons donnée pour la conchoïde de Külp (*Nouv. Ann.*, 1913, p. 195).

en L *à* (C) *qui coupe* Oy *en* P; *la symétrique de* MP *par rapport à* ML *est la tangente cherchée.*

15. Les considérations du paragraphe 13 donnent lieu à un théorème important qui simplifie souvent la recherche des courbes (Φ) quand on en connaît une [1].

Considérons (*fig.* 7) encore la courbe (C) et prenons,

Fig. 7.



pour la transformation par hyperbolisme un nouveau pôle O_1 de coordonnées $(-d, o)$, ainsi qu'un nouvel axe Δ_1 parallèle à Δ. Soit $O_1 y_1$ la parallèle menée par O_1 à Oy. Désignons par O_1' le symétrique du pied de Δ_1 par rapport à O_1, par P_1 le point où la parallèle menée par ce point à la tangente en L à (C) rencontre $O_1 y_1$, par L_1' l'intersection des perpendiculaires menées par L et P_1 à Ox et Oy, et par N_1 le symétrique de P_1 par rapport à L_1'. Le point N_1 décrit la courbe (Γ_1) qui correspond au cas où l'on considère la courbe (Φ) et l'axe $O_1 y_1$ pour droite d.

Soient μ, ν les coordonnées de N par rapport aux axes Oxy, μ_1, ν_1 celles de N_1 par rapport aux axes Oxy_1. Nous aurons, en désignant par b_1 la distance de O_1 à Δ_1,

$$\frac{\mu_1}{2} = \frac{\mu}{2} - d, \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{b_1}{b},$$

[1] *Cf.* § 20.

ou

$$\mu_1 = \mu - 2d, \qquad \nu_1 = \frac{b_1}{b}\nu.$$

On voit donc que les courbes (Γ) et (Γ_1) sont affines (non en position). De plus, si l'on fait subir à l'axe Ox une translation, la courbe différentielle subit la même translation.

En réunissant ces résultats on obtient le théorème suivant :

Les courbes (Γ) *correspondant à tous les hyperbolismes* (Φ) *d'une même courbe* (C), *les axes* Δ *étant parallèles et les pôles quelconques sont des courbes affines quand on prend, dans chaque cas, pour droite* d *la parallèle menée par le pôle à* Δ.

On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Toutes les transformées par aires constantes d'une même courbe correspondant à des droites d *parallèles sont les hyperbolismes d'une même courbe.*

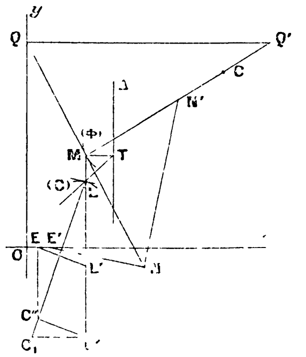
16. *Centre de courbure de l'hyperbolisme.* — Les rapports entre les transformations par aires constantes et par hyperbolisme conduisent à la construction du centre de courbure C en un point M de l'hyperbolisme (Φ) de (C) quand on connaît le centre de courbure au point correspondant L de (C) (*fig.* 8).

Soit C_1 le centre de courbure de la courbe (C) en L; au moyen du théorème de M. d'Ocagne [1] sur le centre de courbure des courbes intégrales on en déduit la tangente en L' à la courbe différentielle de (C). A cet

[1] Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 333.

effet, on projette C_1 en C' sur l'ordonnée de L, puis C' en C'' sur la normale LC_1 à (C), puis C'' en E sur Ox. Le point E est celui où la tangente considérée coupe Ox. En vertu d'une propriété des courbes affines, celle en N

Fig. 8.



à (Γ) rencontre le même axe en E' symétrique de O par rapport à E. Dès lors, connaissant la tangente en N à (Γ), on obtient le centre de courbure C de la courbe (Φ) en M au moyen de la construction du paragraphe 6.

On a donc la construction suivante :

Soit N *le symétrique par rapport à* M *du point* Q *où la tangente en* M *à* (Φ) *coupe* Oy; *on projette* C_1 *en* C' *sur l'ordonnée de* L, *puis* C' *en* C'' *sur la normale à* (C) *en* L, *puis* C'' *en* E *sur* Ox; *si* E' *est le symétrique de* O *par rapport à* E, *les perpendiculaires en* Q *et* N *respectivement sur* Oy *et* $E'N$ *rencontrent la normale en* M *à* (Φ) *en* Q' *et* N'; *le centre de courbure cherché est le milieu de* $Q'N'$.

17. On peut encore remarquer que si l'on considère une courbe (Φ) et la courbe (Γ) qui lui correspond, ainsi que l'anti-hyperbolisme (C) de (Φ), il existe une courbe différentielle de (C) qui est homothétique à (Γ). Il suffit, en effet, de prendre la courbe différentielle en utilisant comme pôle le milieu de OO′.

V. — Applications.

18. *La Kohlenspitzkurve et les hyperbolismes du cercle.* — La courbe différentielle de l'ellipse

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$$

est la *Kohlenspitzkurve* (1)

$$\frac{l^2}{x^2} - \frac{k^2 m^2}{l^2 y^2} = 1.$$

Donc, en utilisant un pôle convenablement choisi (2), on aura comme courbes intégrales de la Kohlenspitzkurve des cercles. Par suite, en vertu des théorèmes du paragraphe 13, on a la proposition suivante :

Les transformées par aires constantes de la Kohlenspitzkurve correspondant à des droites d parallèles aux asymptotes sont les hyperbolismes du cercle.

Si d est l'axe de symétrie parallèle aux asymptotes, parmi les transformées il y a *deux serpentines de Newton* et *une conchoïde de Külp généralisée*.

Si d est une asymptote parmi les transformées il y a une *cubique d'Agnesi*.

Inversement, on a les résultats suivants :

Le lieu du symétrique par rapport à un point M

(1) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 336.

(2) *Voir* paragraphe suivant.

d'une conchoïde de Külp généralisée, ou d'une serpentine de Newton, ou d'une cubique d'Agnesi, du point où la tangente en M *coupe l'asymptote est une Kohlenspitzkurve.*

19. Au moyen de l'équation des transformées par aires constantes retrouvée au paragraphe **13**, on détermine aisément la valeur de la constante a^2 dans chaque cas. Si l'on considère la Kohlenspitzkurve

$$\frac{c^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

la courbe affine, le rapport étant 1 : 2 et l'axe d'affinité Oy, sera la courbe

$$\frac{c^2}{4x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

dont les courbes intégrales obtenues au moyen du pôle $O'(-b, 0)$ sont les cercles de rayon $\frac{c}{2}$ ayant leurs centres sur Oy.

Alors, si $q = 0$ ou c, la courbe intégrale passe par l'origine et l'on obtient les serpentines de Newton. Si $q = \frac{1}{2}c$, on obtient la conchoïde de Külp généralisée.

Pour les serpentines de Newton on a $a^2 = 0$ ou $2bc$.

Pour la conchoïde de Külp généralisée $a^2 = bc$.

Quant à l'agnésienne, son équation étant de la forme

$$y = \varphi(x) = h\sqrt{\frac{l-x}{x}},$$

on a

$$x\varphi(x) = h\sqrt{x(l-x)},$$

et la discussion du paragraphe **8** montre qu'elle est une courbe (Φ_0) pour la Kohlenspitzkurve.

20. *La trisectrice de Maclaurin et la cissoïde.* — Considérons un cercle (Φ) et une droite d tangente en O à ce cercle. On en déduit une courbe (Γ) d'équation

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\theta}{3}}$$

en coordonnées polaires. C'est une trisectrice de Maclaurin, ayant Ox pour axe de symétrie. En prenant l'axe Δ tangent à (Φ), l'anti-hyperbolisme de (Φ) pour le pôle O et l'axe Δ est la courbe piriforme (20). Comme, d'après le paragraphe 12, la cissoïde est l'hyperbolisme de la courbe (20) lorsqu'on prend pour pôle le pied de Δ et pour axe la droite d, on voit, d'après le paragraphe 15, que *la courbe* (Γ) *correspondant à une cissoïde quand la droite d est l'asymptote est une trisectrice de Maclaurin.*

Les équations

$$y = \sqrt{x(b-x)}, \qquad y = (b-x)\sqrt{\frac{b-x}{x}}$$

du cercle et de la cissoïde permettent de voir, au moyen de la discussion du paragraphe 8, que ces courbes sont des courbes (Φ_0) pour la trisectrice.

Parmi les transformées par aires constantes de la trisectrice de Maclaurin, correspondant à une aire nulle et des droites d parallèles à l'asymptote, il y a un cercle et une cissoïde.

Le cercle correspond au cas où d est la tangente au sommet de la boucle; la cissoïde s'obtient quand d est la parallèle à l'asymptote menée par le point situé au tiers de la distance du nœud au sommet de la boucle.

La méthode du paragraphe 6 donne une construction de la tangente à la trisectrice de Maclaurin. Enfin on voit, en vertu du paragraphe 17, que *la trisectrice de Maclaurin est une courbe différentielle d'une courbe piriforme.*

21. *La trisécante de Delanges.* — Si l'on considère comme courbe (Φ) le cercle

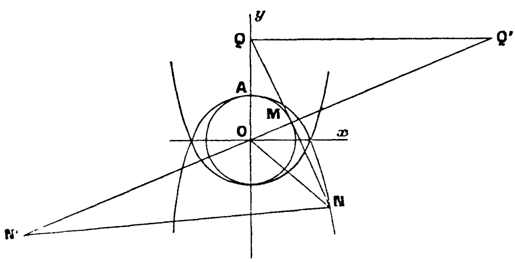
$$x^2+y^2=b^2, \tag{23}$$

on obtient, comme courbe (Γ), une courbe ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho=\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

C'est une trisécante de Delanges [1] dont les asymp-

Fig. 9.



totes sont parallèles à Oy (*fig.* 9). Il est aisé de voir que le cercle (23) est une courbe (Φ_0) pour la trisécante.

Appelons encore Q le point où la tangente au point M du cercle rencontre Oy et N le symétrique de Q par rapport à M. Si l'on désigne par A le sommet de la

[1] LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 231.

branche de la trisécante à laquelle appartient le point N, on a, d'après le paragraphe 6, la construction suivante de la normale à la trisécante au point N :

La perpendiculaire menée de N *à la bissectrice de l'angle* NOA *rencontre* OA *en* Q; *la perpendiculaire en* Q *sur* OA *rencontre cette bissectrice en* Q'. *Le symétrique de* Q' *par rapport à* O *est un point de la normale en* N *à la trisécante.*

Quant aux courbes transformées par aires constantes pour des droites parallèles aux asymptotes, elles sont les hyperbolismes de la lemniscate de Gerono.

Enfin, d'après le paragraphe 17, *la lemniscate de Gerono est une courbe intégrale de la trisécante de Delanges.*

22. *Paraboles d'indices quelconques.* — Prenons pour courbe (Γ) une parabole d'indice n entier ou fractionnaire, d'équation

$$x^n = p^{n-1}y. \tag{24}$$

D'après l'équation (13) sa courbe (Φ_0) est

$$\frac{1}{p^{n-1}}\int_0^{2x} x^n\,dx = 2xy,$$

ou

$$x^n = \frac{n+1}{2^n}p^{n-1}y.$$

La transformée par aires constantes d'une parabole (24) *d'indice n correspondant à une aire nulle et à l'axe* Oy *comme droite d est une parabole de même indice.*

Quant aux courbes (Φ_a) elles ont pour équation

$$2^{n+1}x^{n-1} = 2(n+1)p^{n-1}xy - (n+1)p^{n-1}a^2. \tag{25}$$

Si n est entier (Φ_a) est d'ordre $n+1$. Si n est de la forme $\frac{\gamma}{\delta}$, l'équation (25) devient, en élevant les deux membres à la puissance δ,

$$2^{\gamma+\delta} x^{\gamma+\delta} = (n+1)^{\delta} p^{\gamma-\delta} (2xy - a^2)^{\delta}.$$

Si $\delta > \gamma$, (Φ_a) est d'ordre 2δ.
Si $\delta < \gamma$, (Φ_a) est d'ordre $\gamma + \delta$.

D'ailleurs, une parabole d'indice $\frac{\gamma}{\delta}$ est d'indice $\frac{\delta}{\gamma}$ quand on intervertit les axes. Donc une parabole d'indice fractionnaire $\frac{\gamma}{\delta}$ donne lieu à des transformées (Φ_a) d'ordres $\gamma+\delta$ et 2δ quand on prend pour droites d les axes coordonnés.

Ce résultat est intéressant parce qu'il conduit à des courbes d'ordre impair élevé [1] quand γ et δ sont de parité différente.

Ainsi, les transformées (Φ_a) de la *parabole de Neil* [2], quand d est la normale au point de rebroussement, sont des *quintiques*.

Quand d est la tangente de rebroussement, ces transformées sont des *sextiques*.

Nous avons remarqué que les équations (12) et (13) sont applicables au cas d'axes coordonnés obliques. Or la *parabole de Schooten* [3] a pour équation

$$x^{\frac{4}{3}} = ay,$$

dans un système d'axes à 45°. Les transformées par

---

(1) En général, on rencontre rarement en Géométrie des courbes d'ordre impair supérieur au cinquième (*voir* LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 288 et 294).

(2) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 310.

(3) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. I, p. 313.

aires constantes quand d est l'axe Oy sont donc des *courbes du septième ordre.*

23. Dans le cas de la *parabole du second degré*

$$x^2 = 2py$$

ayant pour axe la droite d, les transformées (Φ_a) sont les cubiques

$$4x^3 - 6pxy + 3a^2p = 0, \tag{26}$$

et la transformée (Φ_0) la parabole

$$x^2 = \frac{3}{2}py.$$

Il n'est pas sans intérêt d'observer que les podaires des cubiques (26) par rapport au sommet de la parabole sont des *courbes du septième ordre.*

En outre, si une corde NQ s'appuyant en N sur la parabole et en Q sur l'axe est telle que l'aire du triangle mixtiligne OQN reste constante, le lieu du centre du cercle touchant la parabole en N et passant par Q est aussi une *courbe du septième ordre.*

VI. — Sur quelques hyperbolismes.

24. *Hyperbolismes du cercle.* — Nous avons donné [1] la définition suivante de la cubique d'Agnesi qui est l'hyperbolisme d'un cercle lorsque le pôle est sur la courbe et que l'axe est perpendiculaire au rayon qui y passe :

La cubique d'Agnesi est le lieu du point d'intersection de la droite de Simson d'un point variable

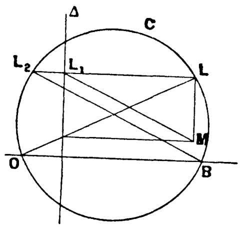
(1) *Mathesis*, 1912 (juillet-août).

d'un cercle par rapport à un triangle isoscèle inscrit avec la parallèle menée par ce point à la base.

On peut étendre ce théorème à tous les hyperbolismes du cercle correspondant à des pôles pris sur la courbe.

Considérons (*fig.* 10) dans le plan d'un cercle (C) une droite Δ et un point O pris sur la courbe. La perpendiculaire abaissée de O sur Δ recoupe (C) en B. Celle abaissée de L sur Δ rencontre Δ en L_1 et (C) en L_2. Les droites L_1M et BL_2 ont une direction symétrique de celle de OL par rapport à Δ; elles

Fig. 10.



sont donc parallèles. En vertu d'une propriété bien connue, ML est la droite de Simson de L par rapport au triangle inscrit dans (C), ayant B pour sommet et Δ pour base. D'où ce théorème :

Un hyperbolisme du cercle correspondant à un pôle situé sur la courbe est le lieu de l'intersection de la droite de Simson d'un point variable de ce cercle par rapport à un triangle inscrit avec la parallèle menée par ce point à l'un des côtés.

25. *Centre de courbure des conchoïdes de Külp généralisées.* — La construction de la tangente et celle du centre de courbure des hyperbolismes du cercle se déduisent aisément des paragraphes **10**, **14** et **16**.

Dans le cas des conchoïdes de Külp généralisées cette dernière construction se simplifie. Pour ces courbes le point E n'est autre que le symétrique par rapport au pied de l'ordonnée de M, du point où la tangente en M à la conchoïde rencontre l'axe Ox (*fig.* 11). En effet, les équations paramétriques de la conchoïde sont

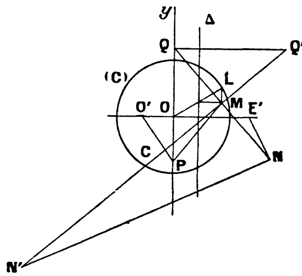
$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

L'équation de la droite MP est

$$ay\sin\varphi\cos\varphi - bx + ab\cos^3\varphi = 0;$$

elle coupe l'axe Ox en un point d'abscisse $a\cos^3\varphi$,

Fig. 11.



c'est-à-dire le point E. On a donc cette construction du centre de courbure de la conchoïde de Külp généralisée :

La tangente au point M *coupe l'asymptote en* Q *dont le symétrique par rapport à* M *est* N. *La symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée de* M *rencontre* Ox *en* E; *soit* E′ *le symétrique de* O *par rapport à* E. *Les perpendiculaires en* Q *sur l'asymp-*

tote et en N *sur* E′N *coupent en* Q′ *et* N′ *la normale à la conchoïde en* M. *Le centre de courbure est le milieu de* Q′N′ ([1]).

26. Les paragraphes **10**, **14** et **17** donnent aussi la construction de la tangente et celle du centre de courbure à la lemniscate de Gerono et à la courbe piriforme (20). En outre, la transformation par hyperbolisme donne lieu à des relations entre plusieurs courbes remarquables.

L'hyperbolisme de la *Kohlenspitzkurve*

$$\frac{c^2}{y^2} - \frac{b^2}{x^2} = 1$$

est la *conchoïde de Külp généralisée*

$$x^2 y^2 = b^2(c^2 - y^2).$$

La *cappa*

$$c^2 y^2 = x^2(x^2 + y^2)$$

donne lieu à une *Kohlenspitzkurve*

$$\frac{c^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

ayant mêmes asymptotes.

Enfin, deux anti-hyperbolismes de la parabole sont des cubiques remarquables rencontrées par G. de

---

([1]) On peut comparer à cette construction celle donnée, pour le cas particulier de la conchoïde de Külp ordinaire, par M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 354-359). Celle que nous indiquons est plus générale et plus directe. M. Balitrand donne (p. 356) une construction de la tangente à la Kohlenspitzkurve, lieu de N. On peut remarquer qu'une autre construction simple de cette tangente découle aussi des considérations qui précèdent. La symétrique de la tangente en M à la conchoïde, par rapport à l'ordonnée de M, coupe Ox en E; le symétrique de O par rapport à E est un point de la tangente considérée.

Longchamps dans son *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* ([1]).

Si l'on considère une parabole

$$y^2 = 2bx - b^2$$

qui a Oy pour directrice et Δ pour corde focale principale, ou celle,

$$y^2 = -2bx + b^2,$$

ayant Oy pour corde focale principale et Δ pour directrice, on obtient comme anti-hyperbolismes les cubiques

$$x^3 = \frac{b}{2}(x^2 \pm y^2).$$

Ce sont la duplicatrice cubique et la feuille parabolique droite.

Les anti-hyperbolismes d'une parabole obtenus en prenant pour pôle et axe le pied de la directrice et la corde focale principale ou le foyer et la directrice sont la duplicatrice cubique et la feuille parabolique droite.

VII. — CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DES COURBES AFFINES.

27. La méthode du paragraphe 6 donne la solution du problème général suivant :

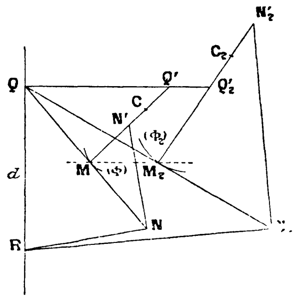
Étant donné le centre de courbure C *en un point* M *d'une courbe, trouver le centre de courbure* C_2 *au point correspondant* M_2 *d'une courbe affine.*

Prenons pour droite d l'axe d'affinité et considérons

([1]) Paris, 1890, pages 92-94 et pages 120-121.

la transformation inverse de celle par aires constantes (*fig.* 12). Dans cette transformation, les transformées

Fig. 12.



de courbes affines sont encore affines. Dès lors, appelons (Φ) la courbe donnée, (Φ_2) la courbe affine considérée, N et N_2 les symétriques par rapport à M et M_2 du point Q où les tangentes en M et M_2 aux courbes (Φ) et (Φ_2) se rencontrent sur d. Les tangentes en N et N_2 aux lieux (Γ) et (Γ_2) de ces points se rencontrent en un point R de d. D'après le paragraphe 6, ce point R s'obtient comme suit :

La perpendiculaire en Q *à* d *rencontre la normale en* M *à* (Φ) *en* Q'; *soit* N' *le symétrique de* Q' *par rapport à* C; *la perpendiculaire en* N *à* N'N *coupe* d *en* R.

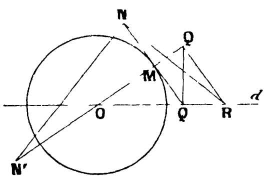
Ce point R sert ensuite à construire les centres de courbure aux point correspondants à M dans toutes les courbes affines. On obtient le centre de courbure C_2 de la courbe (Φ_2) de la manière suivante :

La normale en M_2 *à* (Φ_2) *rencontre en* N'_2 *et* Q'_2 *les perpendiculaires à* RN_2 *et à* d *en* Q; *le centre de courbure* C_2 *est le milieu de* $Q'_2N'_2$.

On peut donc en déduire que le *lieu des centres de courbure* aux points correspondants d'une famille de courbes affines est une *cubique*. Mais cette propriété résulte immédiatement de l'expression des coordonnées du centre de courbure en un point d'une courbe quelconque.

28. Quand la courbe (Φ) est un cercle, la droite d étant un diamètre, le point R jouit de la propriété suivante (*fig* 13) :

Fig. 13.



La tangente en M *au cercle rencontre* d *en* Q, *la perpendiculaire en* Q *sur* d *rencontre le rayon* OM *en* Q′, *la perpendiculaire en* Q′ *sur* OQ′ *coupe* d *en* R.

Car, dans ce cas, les triangles N′ON et RQ′N sont semblables et l'on a

$$ON' : Q'R = ON : Q'N$$

ou

$$OQ' : Q'R = OQ : QQ'.$$

On en déduit cette *construction de la tangente à la trisécante de Delanges* [1], en supposant que A soit le sommet de la branche à laquelle appartient N :

La perpendiculaire menée de N *à la bissectrice*

---

[1] *Cf.* § 21

de l'angle NOA *rencontre* OA *en* Q; *la perpendiculaire en ce point sur* OA *coupe la bissectrice en* Q′; *la perpendiculaire en* Q′ *sur* OQ′ *rencontre* OA *en* R; *la tangente cherchée est la droite* NR.