NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur les couples de points associés sur une ellipse en vertu du théorème de Fagnano

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 337-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__337_0>

[L[1]9b]

SUR LES COUPLES DE POINTS ASSOCIÉS SUR UNE ELLIPSE EN VERTU DU THÉORÈME DE FAGNANO;

Par M. M. D'OCAGNE.

1. On sait en quoi consiste le théorème de Fagnano :

Si deux points M *et* M′, *pris sur une ellipse, sont tels que les normales à la courbe en ces points soient tangentes à un même cercle concentrique à l'ellipse et de rayon* r, *la différence des arcs* BM *et* AM′ *de la courbe est égale à* r.

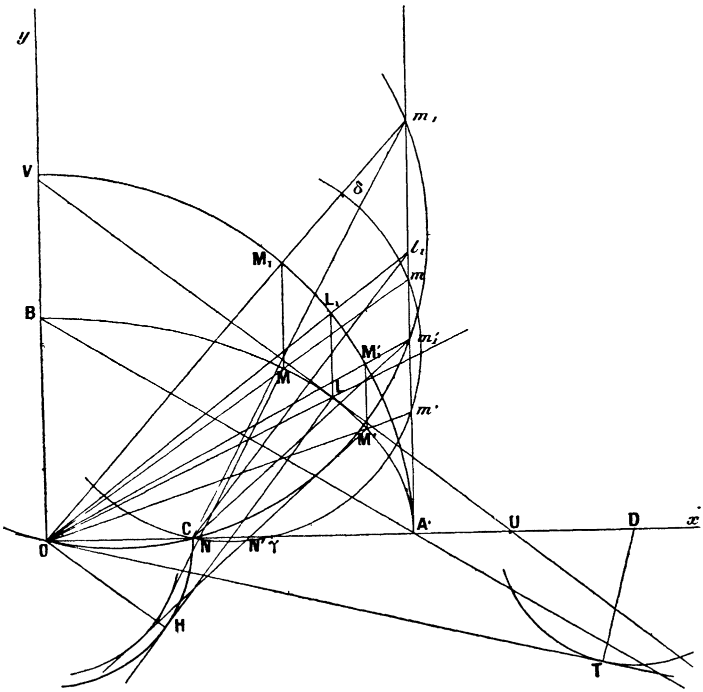
Nous dirons dans la suite de cette Note que les points M et M′ sont *associés* en sous-entendant : *en vertu du théorème de Fagnano*. Nous appellerons aussi *directions associées* celles des deux diamètres de l'ellipse aboutissant aux points M et M′.

On sait que le couple des points associés M et M′ n'est réel qu'autant que $r < a - b$, a et b étant les demi-axes OA et OB de l'ellipse. Lorsque $r = a - b$, les points M et M′ se confondent en un point L qu'on peut appeler *point limite;* son diamètre sera le *diamètre limite*. Ce point limite est également connu sous le nom de *point de Fagnano*.

2. Nous avons appelé *déviation* en un point d'une ellipse (¹) l'angle δ que la normale MN à la courbe en

(¹) Les Notes que nous avons consacrées à l'étude de cet élément ont paru dans les *Nouvelles Annales* en 1886 (p. 370) et 1888 (p. 268). Nous les désignerons ici comme Notes I et II.

ce point fait avec le diamètre correspondant OM_1 du cercle principal. Comme ces deux droites se coupent, ainsi qu'on sait, sur le cercle de centre O et de



rayon $a + b$, on a immédiatement

$$(1) \qquad r = (a + b)\sin\delta.$$

Il en résulte que *deux points associés* M *et* M' *sont des points de même déviation* et que *le point limite est le point de déviation maxima.* Cette simple remarque peut conduire à de nombreuses conséquences.

Nous rappellerons d'abord ce théorème contenu dans notre Note II (p. 274) : *si, sur le demi-axe* OA, *on prend le point* C *tel que* $OC = a - b$, *et si le diamètre* OM_1 *du cercle principal coupe en* m_1 *la tangente au sommet* A, *la droite* Cm_1 *est parallèle à la normale en* M.

Il en résulte que *l'angle* Om_1C *est égal à la déviation* δ *pour le point* M et, par suite, que *les points* m_1 *et* m'_1 *correspondant aux points associés* M *et* M' *sont, avec les points* O *et* C, *sur un même cercle.*

De plus, la tangente OT à ce cercle faisant avec OC l'angle δ, si l'on prend, sur le prolongement de OA, le point D tel que $AD = b$, on voit que *la distance* DT *de ce point à cette tangente est égale à* r, en vertu de (1).

De là, une solution très simple, par la règle et le compas, de ce problème : *construire le couple des points associés pour lesquels la différence* arc BM — arc AM' *a une valeur donnée* r. Du point D comme centre avec le rayon r on décrit un cercle auquel on mène la tangente OT, puis on trace le cercle passant par O et C et tangent en O à OT. Il coupe la tangente a l'ellipse en son sommet A aux points m_1 et m'_1, et les droites Om_1 et Om'_1 donnent sur le cercle principal les points M_1 et M'_1 auxquels correspondent, sur l'ellipse, les points M et M' cherchés.

Il suffit dès lors, pour avoir le point limite L, de mener par O et C le cercle tangent à Am_1 qu'il touche en l_1. La droite Ol_1 donne sur le cercle principal le point L_1 auquel correspond, sur l'ellipse, le point L demandé, et l'on vérifie que la normale en L à l'ellipse est tangente au cercle de centre O et de rayon OC.

3. Si nous désignons par μ_1 et μ'_1 les coefficients angulaires des diamètres OM_1 et OM'_1 du cercle principal nous avons

$$(2) \qquad \mu_1\mu'_1 = \frac{Am_1.Am'_1}{OA^2} = \frac{AO.AC}{OA^2} = \frac{AC}{OA} = \frac{b}{a},$$

d'où nous déduisons pour les coefficients angulaires μ et μ' des diamètres correspondants OM et OM' de l'ellipse, respectivement égaux aux précédents multipliés par $\frac{b}{a}$,

$$(3) \qquad \mu\mu' = \frac{b^3}{a^3}.$$

Remarquons en passant que si nous prenions les points de rencontre m et m' des diamètres associés OM et OM' avec la tangente Al_1, nous aurions, en vertu de (3),

$$Am.Am' = \frac{b^3}{a} = \frac{b^2}{a}\,b.$$

Or $b = AC$, et, si γ est le centre de courbure répondant au sommet A, $A\gamma = \frac{b^2}{a}$; donc *les cercles circonscrits aux triangles tels que* Cmm' *passent tous par le centre de courbure* γ.

La formule (3) montre que, pour la direction limite, on a $\mu = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$, et la formule (2), pour le diamètre correspondant du cercle principal, $\mu_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Ces résultats se trouvent déjà dans notre Note I pour le point de déviation maxima dont nous venons de faire remarquer l'identité avec le point limite. Nous nous bornerons à rappeler quelques propriétés de ce point, obtenues dans cette Note ainsi que dans la Note II, dont, au reste, la démonstration est des plus aisées :

La tangente UV *au point limite a, sur* Ox, *même inclinaison que* OL_1. *Elle est divisée par le point de contact* L *en segments* LU *et* LV *respectivement égaux à b et à a. Donc, si l'on engendre l'ellipse au moyen du point séparatif des segments a et b sur la droite de longueur $a+b$ glissant par ses extrémités sur* Ox *et* Oy, UV *constitue la position de cette droite pour laquelle elle devient tangente à l'ellipse décrite. La distance du point* O *à cette tangente est égale à* $\sqrt{ab}$.

D'ailleurs, *le rayon de courbure au point* L *est aussi égal à* $\sqrt{ab}$ *et, par suite, le centre de courbure correspondant est la projection orthogonale* H *du centre* O *sur la normale en* L. *La droite* OH *est donc normale en* H *à la développée de l'ellipse; d'où se déduit que le centre de courbure* H *est le plus voisin du centre* O *de la courbe.*

4. On peut se proposer de trouver la relation qui existe entre les rayons de courbure en deux points associés.

L'expression bien connue du rayon de courbure ρ en un point de l'ellipse, en fonction de l'anomalie excentrique φ, peut s'écrire

$$(\rho ab)^{\frac{2}{3}} = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi$$

ou, si μ_1 est le coefficient angulaire du diamètre correspondant du cercle principal,

$$(\rho ab)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\mu_1^2 + b^2}{1+\mu_1^2}.$$

Posant, pour simplifier l'écriture,

$$\theta = (\rho ab)^{\frac{1}{3}}, \tag{4}$$

on en déduit

$$(5)\qquad \mu_1^2 = \frac{\theta^2 - b^2}{a^2 - \theta^2}.$$

Remplaçant μ_1 et μ'_1 par leurs valeurs (5) dans (2) on a

$$\frac{(\theta^2 - b^2)(\theta'^2 - b^2)}{(a^2 - \theta^2)(a^2 - \theta'^2)} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou, après des réductions faciles,

$$\theta\theta' = ab,$$

d'où aussi, en remplaçant θ et θ' par leurs valeurs tirées de (4),

$$(6)\qquad \rho\rho' = ab.$$

Ainsi, *le produit des rayons de courbure en deux points associés est constant et égal au produit des demi-axes*.

On tire immédiatement de là pour le rayon de courbure au point limite l'expression $\sqrt{ab}$ indiquée plus haut.

Comme, d'autre part, si h est la distance du centre à la tangente en M, on a [1]

$$\rho h^3 = a^2 b^2,$$

on voit qu'on a encore

$$hh' = ab,$$

[1] Nous avons indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1902, p. 231) la façon dont nous avons obtenu ce théorème énoncé par nous sous forme de la question 1919 (*N. A.*, 1902, p. 48). Une solution de cette question a été donnée (1903, p. 91) par M. Chassiotis qui a, depuis lors, rectifié lui-même (même tome, p. 515) une observation fautive qu'il y avait ajoutée. Il est clair qu'on pourrait, tout aussi facilement, démontrer directement la formule $hh' = ab$, et en déduire par un calcul inverse la valeur de $\rho\rho'$.

c'est-à-dire que *le produit des distances du centre aux tangentes en deux points associés est aussi constant et égal au produit des demi-axes*, d'où résulte immédiatement que la distance du centre à la tangente au point limite est égale à $\sqrt{ab}$, ainsi qu'on l'a rappelé ci-dessus.

5. On est dans l'habitude de ne considérer les points associés en vertu du théorème de Fagnano que sur un même quadrant d'ellipse. Mais, en réalité, les huit points, à raison de deux par quadrant, pour lesquels la distance du centre à la normale est r, peuvent être associés autrement de façon à définir encore des arcs dont la différence soit égale à r.

Ces huit points formant les sommets de deux rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes de l'ellipse, chacun d'eux peut être associé à chacun des quatre sommets de l'autre rectangle, ce qui donne en tout seize couples de points pour chaque valeur de r. Mais, un examen facile montre qu'il y a lieu de distinguer, d'une part, les couples constitués par deux points associés appartenant à un même quadrant ou à deux quadrants opposés par le sommet, que nous appellerons de la *première espèce*, et, d'autre part, les couples constitués par deux points associés situés dans deux quadrants contigus, que nous appellerons de la *deuxième espèce*.

Au point de vue de l'application du théorème de Fagnano, pour les couples de la première espèce, les arcs BM (ou B'M) et AM' (ou A'M') doivent être pris *en sens contraire* (c'est le cas des couples ordinairement envisagés); pour ceux de la deuxième, ces arcs doivent être pris *dans le même sens*.

Dans le premier cas, la relation entre les directions associées est définie par la formule (3) ci-dessus; dans le second, par la formule

$$(3^{bis}) \qquad \mu\mu' = -\frac{b^3}{a^3}.$$

6. Si nous considérons les cordes unissant les points associés de l'une ou de l'autre espèce, nous pouvons nous proposer de trouver leur enveloppe. Traitons d'abord le problème dans le cas de la deuxième espèce.

L'équation de l'ellipse étant écrite

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

si nous représentons la corde unissant les points associés M et M′ par l'équation

$$y = mx + n,$$

nous avons immédiatement, pour le faisceau des deux diamètres OM et OM′, l'équation

$$a^2(b^2 - n^2)y^2 - 2ma^2b^2xy + b^2(m^2a^2 - n^2)x^2 = 0,$$

d'où nous tirons

$$\mu\mu' = \frac{b^2(m^2a^2 - n^2)}{a^2(b^2 - n^2)}.$$

Portant cette valeur dans (3^{bis}), nous obtenons

$$a(m^2a^2 - n^2) = b(n^2 - b^2),$$

d'où

$$n = \sqrt{\frac{m^2a^3 + b^3}{a+b}}.$$

L'équation de la corde est donc

$$y = mx + \sqrt{\frac{m^2a^3 + b^3}{a+b}}.$$

On peut l'écrire

$$(a+b)(y-mx)^2 = m^2a^3 + b^3$$

ou

$$m^2[(a+b)x^2 - a^3] - 2(a+b)xym + (a+b)y^2 - b^3 = 0,$$

d'où, immédiatement, son enveloppe

$$(a+b)^2x^2y^2 - [(a+b)x^2 - a^3][(a+b)y^2 - b^3] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} = \frac{1}{a+b},$$

ellipse dont les demi-axes α et β sont donnés par

$$\alpha^2 = \frac{a^3}{a+b}, \qquad \beta^2 = \frac{b^3}{a+b}.$$

Autrement dit : *les demi-axes α et β sont les coordonnées du point limite* L.

Ainsi : *l'enveloppe des cordes unissant les couples de la seconde espèce est l'ellipse $\mathcal{E}$ de centre* O, *ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy, et qui est inscrite dans le rectangle formé par les points limites des quatre quadrants.*

Cette ellipse $\mathcal{E}$ est nécessairement aussi *inscrite dans le losange formé par les sommets de l'ellipse donnée*, dont les côtés sont à la fois des cordes de la première et de la deuxième espèce. La vérification analytique de ce fait est d'ailleurs des plus faciles.

On trouve ainsi que le point de contact de l'ellipse $\mathcal{E}$ avec AB appartient à la droite

$$x - y = a - b,$$

c'est-à-dire à la parallèle à la bissectrice de l'angle AOB, menée par le point C.

7. Ayant une corde de la seconde espèce, pour en obtenir une de la première, il suffit, conservant une de ses extrémités, de prendre la symétrique de l'autre par rapport à l'un ou à l'autre des axes. L'ellipse précédente permet ainsi de construire toutes les cordes des deux espèces. Mais on peut, par un calcul calqué sur le précédent, obtenir aussi, si l'on veut, l'enveloppe des cordes de la première espèce. Il suffit, pour cela, de faire usage de la formule (3) au lieu de (3^{bis}). Cela donne

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{b^3} = \frac{1}{a-b},$$

hyperbole $\mathcal{H}$ ayant pour asymptotes les droites

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b^3}{a^3}},$$

c'est-à-dire les diamètres limites de l'ellipse donnée. Cette hyperbole est, elle aussi, tangente aux côtés du losange formé par les sommets de cette ellipse, auquel, vu sa situation extérieure, nous la dirons *ex-inscrite*.

L'hyperbole $\mathcal{H}$ et l'ellipse $\mathcal{E}$, enveloppes des cordes unissant les points associés de la première et de la seconde espèce, se prêtent encore à une autre détermination de ces couples de points; en effet, les relations (3) et (3^{bis}) caractérisent respectivement des couples de directions conjuguées dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ et dans l'ellipse $\mathcal{E}$. On peut donc dire que *les couples de directions associées de chaque espèce sont en même temps des couples de directions conjuguées par rapport à la conique enveloppe répondant à cette espèce*. Et cela fournit un nouveau moyen d'engendrer les divers couples de points associés.

On remarquera enfin que, dans le cas de la première espèce, l'hyperbole $\mathcal{H}$ est tangente aux quatre droites qui touchent l'ellipse en ses points limites (qui sont des cordes limites), et que les tangentes à cette hyperbole, qui se rapprochent, à partir de celles-ci, des tangentes en ses sommets situés sur Ox, ne coupent plus l'ellipse donnée en des points réels, tandis que, dans le cas de la deuxième espèce, toutes les tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}$ fournissent des couples réels de points associés.