Remarques sur la théorie des normales aux coniques et aux quadriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 231-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__231_1>

[$L^1$5][$L^2$8]

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES NORMALES AUX CONIQUES ET AUX QUADRIQUES;

PAR UN ABONNÉ.

Dans un des derniers numéros des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (décembre 1914), M. J. Lemaire a montré qu'on peut donner, de l'hyperbole d'Apollonius et de la cubique gauche aux pieds des normales, issues d'un point à une quadrique, des définitions absolument analogues. Celle qu'il a choisie n'est pas la seule qui jouisse de cette propriété. Il en existe d'autres qui s'étendent sans difficulté, et avec la plus entière analogie, de la première courbe à la seconde.

Tout d'abord on peut changer, très légèrement, la définition de M. J. Lemaire, et lui donner une forme souvent plus utile dans les applications.

C'est ainsi qu'on peut dire que l'hyperbole d'Apollonius, relative à un point P, est le lieu des points dont les polaires, par rapport à la conique donnée, sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P. De même, la cubique gauche, relative à un point P, est le lieu des points dont les plans polaires, par rapport à la quadrique donnée, sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P.

On sait aussi que l'hyperbole d'Apollonius est le lieu des points de rencontre des sécantes communes à la conique et à une série de cercles ayant pour centre commun le point P. Dans l'espace, la cubique gauche est le lieu des sommets des cônes du deuxième degré, passant par l'intersection de la quadrique et d'une série de sphères ayant pour centre commun le point P.

L'hyperbole d'Apollonius est encore le lieu des centres des coniques qui passent par les points communs à la conique et à un cercle de centre P. Pour la cubique gauche, on peut dire qu'elle est le lieu des centres des quadriques passant par l'intersection de la quadrique donnée et d'une sphère de centre P.

Les analogies ne s'arrêtent pas là. L'hyperbole passe par le point P, par le centre de la conique et par les points à l'infini sur ses axes. Elle ne change pas si l'on remplace la conique donnée par une autre qui lui soit homothétique et concentrique. De même la cubique gauche passe par le point P, par le centre de la quadrique et par les points à l'infini sur ses axes. Elle reste invariable quand la quadrique considérée se déforme en restant homothétique et concentrique à elle-même.

Dans les cours de Mathématiques spéciales, après avoir montré que le problème qui consiste à mener des normales à une conique par un point donné peut se résoudre par l'hyperbole d'Apollonius, on indique que cette hyperbole passe, comme nous venons de le dire, par le point P, par le centre de la conique et par les points à l'infini sur ses axes. Il faut observer que la connaissance de ces quatre points ne suffit pas à sa détermination et que, si jamais on doit la tracer sur le papier, il est indispensable d'y joindre d'autres éléments.

D'ailleurs, au point de vue graphique, on ne connaît jamais trop de points d'une courbe. Au point de vue géométrique, le fait qu'un nombre de points, supérieur à celui qui est nécessaire pour la déterminer, est situé sur elle, entraîne des propriétés ou des théorèmes. Les définitions précédentes permettent d'ajouter aux points qui, dans tous les Traités, sont indiqués comme étant sur l'hyperbole, un certain nombre de points nouveaux; de sorte qu'au total on en connaît beaucoup plus qu'il n'est nécessaire pour la déterminer.

C'est ainsi que, si l'on joint le point P aux foyers de la conique et si l'on prend les points de rencontre des droites ainsi obtenues avec les directrices correspondantes, on obtient deux points de l'hyperbole. De même sont situés sur elle les points d'intersection de la polaire de P, par rapport à la conique donnée, avec les bissectrices de l'angle formé par les tangentes issues de P. Enfin si la conique donnée est une hyperbole, si de P on abaisse les perpendiculaires sur ses asymptotes, si l'on prend le point de rencontre de chacune de ses perpendiculaires avec l'autre asymptote, on obtient encore deux points de l'hyperbole d'Apollonius. Dans le cas de l'ellipse, les asymptotes sont imaginaires, mais on obtient deux points analogues en les remplaçant par les diamètres conjugués égaux.

Pour s'assurer que tous ces points sont bien sur l'hyperbole, il suffit de remarquer que leurs polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent à P.

Cela fait au total, avec les points classiques, dix points remarquables situés sur l'hyperbole d'Apollonius. Le théorème de Pascal, par exemple, appliqué à six quelconques d'entre eux, fournit chaque fois une propriété de cette courbe.

Dans l'espace, les Ouvrages classiques n'indiquent que cinq points situés sur la cubique gauche; ce qui est insuffisant pour sa détermination. On peut y en ajouter d'autres; par exemple les points d'intersection du plan polaire de P avec les axes du cône, de sommet P, circonscrit à la quadrique donnée. Mais il faut bien remarquer que le moyen le plus naturel, pour construire la cubique, consiste à considérer les cylindres qui la projettent sur deux des plans principaux de la quadrique. Ces cylindres ont pour traces, sur ces plans, deux hyperboles équilatères, qui sont les hyperboles d'Apollonius des projections du point P, par rapport aux sections principales correspondantes. Leur intersection, du quatrième ordre au total, se compose de la cubique gauche et d'une droite rejetée à l'infini.

Revenons au cas du plan. Si la conique donnée est une hyperbole, les droites qui joignent son centre aux points de l'hyperbole d'Apollonius, situés sur ses asymptotes, sont deux cordes supplémentaires de cette dernière, puisqu'elles sont également inclinées sur ses axes. Le centre de l'hyperbole d'Apollonius est donc le milieu du segment qui joint ces deux points. Si la conique donnée est une ellipse, il faut remplacer les asymptotes par les diamètres conjugués égaux; mais la construction du centre ne change pas.

Dans tous les cas, on connaît le centre de l'hyperbole d'Apollonius, par suite aussi ses asymptotes, ses axes et tous ses éléments remarquables.