Myller-Lebedeff

Sur un théorème d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 228-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__228_0>

[A4e]

SUR UN THÉORÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. MYLLER-LEBEDEFF,
Maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).

On sait l'importance de la résolution de l'équation binome

$$x^n = 1,$$

à l'aide de racines carrées, pour la Géométrie, notamment pour la construction des polygones réguliers au moyen de la règle et du compas. La discussion est fondée sur *ce théorème :*

Une équation irréductible qui peut être résolue au moyen d'extractions de racines carrées doit être d'un degré égal à une puissance de 2.

La démonstration habituelle de ce théorème (*voir*, par exemple, KLEIN, *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire*, p. 13-21) exige la discussion assez longue, d'ailleurs élémentaire, de la forme normale de la racine de l'équation, la construction de l'équation à laquelle satisfont toutes les valeurs conjuguées de la racine, et enfin la construction de l'équation du degré minimum, qu'on démontre être irréductible et unique; on emploie aussi nécessairement les propriétés des fonctions irréductibles.

Dans ce qui suit, nous donnons une autre démonstration plus courte du théorème énoncé, fondée uniquement sur les propriétés des fonctions irréductibles et sur l'irréductibilité de la fonction $x^2 - a$, si a n'est pas carré d'un autre nombre du corps $R(a)$, le corps ou le domaine de rationalité étant défini comme d'ordinaire.

Démonstration. — Soit $f(x) = 0$ une équation irréductible du degré m résoluble à l'aide de racines carrées. $f(x)$ devient réductible après l'adjonction d'une racine de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - a = 0;$$

$f(x)$ étant encore irréductible dans le corps $R(a)$; nommons cette racine α et soit

$$(2) \qquad f(x) = f_1(x, \alpha) f_2(x, \alpha),$$

où $f_1(x, \alpha)$, $f_2(x, \alpha)$ sont des polynomes en x de degré m_1, m_2 respectivement, dont les coefficients sont fonctions rationnelles de α.

L'identité (2) en x peut être considérée comme une équation en α dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$. L'équation (2), ayant une racine commune avec l'équation irréductible (1), doit être satisfaite aussi par l'autre racine de l'équation (1), d'après la propriété fondamentale des équations irréductibles.

Par conséquent,

$$(3) \qquad f(x) = f_1(x, -\alpha) f_2(x, -\alpha).$$

En multipliant (2) et (3), on aura

$$f^2(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha).$$

Or

$$(4) \qquad f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha) = F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est un polynome du degré $2m_1$ ayant ses coefficients rationnels dans $R(a)$. De même

$$f_2(x, \alpha) f_2(x, -\alpha) = F_2(x).$$

Mais si

$$f^2(x) = F_1(x) F_2(x),$$

il s'ensuit

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(x) = f(x), \\ F_2(x) = f(x), \end{cases}$$

car $f(x)$ est irréductible dans $R(a)$.

L'hypothèse $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = f^2(x)$ doit être rejetée, car $f_1(x, \alpha)$ n'est pas une constante. La comparaison de (5) à (4) donne

$$f(x) = f_1(x, \alpha) f_1(x, -\alpha)$$

et

$$m = 2m_1.$$

Avec le facteur $f_1(x, \alpha)$ on peut maintenant procéder comme avec $f(x)$. On a seulement à démontrer d'abord que $f_1(x, \alpha)$ est irréductible dans le corps de ses coefficients, c'est-à-dire dans $R(\alpha)$.

En effet, soit au contraire

$$f_1(x, \alpha) = \varphi_1(x, \alpha) \varphi_2(x, \alpha).$$

Comme cette relation peut être envisagée comme une équation en α avec des coefficients rationnels, on a aussi

$$f_1(x, -\alpha) = \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, -\alpha).$$

En multipliant ces deux relations on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_1(x, \alpha) \varphi_1(x, -\alpha) \varphi_2(x, \alpha) \varphi_2(x, -\alpha) \\ &= \Phi_1(x) \Phi_2(x), \end{aligned}$$

où $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont des polynomes dont les coefficients appartiennent au corps $R(a)$, ce qui ne peut pas être, $f(x)$ étant irréductible dans $R(a)$.

La fonction $f_1(x, \alpha)$, irréductible et du degré m_1, devient réductible après l'adjonction à $R(\alpha)$ d'une certaine racine carrée β qui satisfait à l'équation

$$x^2 - b = 0,$$

$f_1(x, \alpha)$ étant encore irréductible après l'adjonction de b à $R(\alpha)$. On peut donc appliquer le raisonnement précédent et conclure que

$$m_1 = 2m'_1.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un facteur linéaire de $f(x)$, on établit que $m = 2^n$.