E. CAHEN

Sur le mouvement rectiligne tautochrone. Généralisation

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 175-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__175_1>

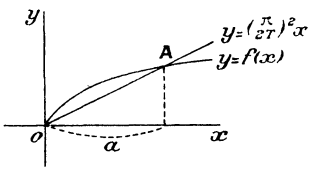
[R5C]

SUR LE MOUVEMENT RECTILIGNE TAUTOCHRONE. GÉNÉRALISATION;

PAR M. E. CAHEN.

C'est une question classique de trouver quelle doit être la loi de la force agissant sur un point matériel, mobile sur une droite, dans le cas où cette loi ne dépend que de la position du mobile; pour que ce mobile, abandonné sans vitesse initiale, mette toujours le même temps pour atteindre un certain point O de cette droite, quel que soit le point de départ. Cette question se traite ordinairement par une méthode due à Puiseux (*voir*, par exemple, Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, 2e édit., p. 340). Cette méthode emploie entre autres un changement de variables, une dérivation sous le signe $\int$ et la résolution d'une équation différentielle.

Voici une autre méthode, beaucoup plus simple. Prenons le point O comme origine des abscisses comp-



tées sur la droite. Soit $-f(x)$ l'expression de la force qu'il faut appliquer au point M, d'abscisse x, pour qu'il arrive en O dans le temps T. (On suppose, ce qui est permis, que la masse de M est égale à 1.)

Or, d'après l'étude directe du mouvement vibratoire, on connaît une solution, à savoir la force

$$-\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x.$$

On va montrer qu'il n'y en a pas d'autre, en supposant la fonction $f(x)$ soumise à une restriction qui apparaîtra dans la démonstration.

En effet, si la fonction $f(x)$ n'était pas identique à la fonction $\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$, il y aurait un intervalle fini o, a, dans lequel $f(x)$ serait constamment plus grand ou constamment plus petit que $\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$; supposons constamment plus grand pour fixer les idées (voir *figure*). Alors il est évident que si le mobile était abandonné sans vitesse initiale, à une distance a de l'origine et soumis à la force $-f(x)$, il mettrait moins de temps pour arriver en O que s'il était soumis à la force

$$-\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x,$$

c'est-à-dire un temps moindre que T.

La restriction annoncée plus haut est que le point A existe, c'est-à-dire que la courbe $y=f(x)$ ne coupe pas la droite $y=\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$ en une infinité de points voisins de O.

Mais une pareille restriction existe aussi dans la démonstration de Puiseux, car on y trouve le passage suivant (Appell, *loc. cit.*, p. 342) : « Cette expression doit être nulle quel que soit z_0, ce qui exige que la fonction soumise à l'intégration soit identiquement nulle, car si elle ne l'était pas *on pourrait prendre* z_0 *assez petit pour que, entre les limites* o *et* z_0, *cette fonction garde un signe constant.* » Ce qui revient à dire que la courbe qui représente ladite fonction ne peut couper une infinité de fois l'axe des abscisses aux environs du point A.

Si l'on considère des fonctions dont la courbe représentative couperait la droite $y=\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x$ une infinité de fois entre O et un point aussi rapproché qu'on veut de O $\left[\text{par exemple, } y=\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 x + ax^n \sin\frac{b}{x}\right]$, rien ne dit qu'une telle loi de force ne satisferait pas au tautochronisme.

Il nous semble que cette démonstration, outre qu'elle est plus simple que celle de Puiseux, met mieux en évidence la raison d'être du théorème et les conditions dans lesquelles il est exact.

De plus, cette démonstration se généralise. Supposons qu'on cherche la loi de force telle que le mobile abandonné sans vitesse initiale du point d'abscisse x_0 mette le temps $F(x_0)$ pour arriver en O. Si l'on a trouvé une solution, à savoir $-f(x)$, il n'y en a pas d'autre; pourvu qu'on n'admette pas de loi de force $-f_1(x)$ telle que les courbes $y=f(x)$ et $y=f_1(x)$ se coupent en une infinité de points voisins de l'origine.

Par exemple, un point soumis à une force constante, abandonné sans vitesse initiale au point d'abscisse x_0, met, pour venir jusqu'à l'origine, un temps proportionnel à $\sqrt{x_0}$. Il n'y a pas d'autre loi de force satisfaisant à cette condition, sauf peut-être des forces qui repasseraient un nombre indéfini de fois par la même valeur dans les environs du point O.