Nouvelles annales de mathématiques

C.-A. Laisant

Propriété de deux suites sommables

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 166-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__166_1>

[A1a]

PROPRIÉTÉ DE DEUX SUITES SOMMABLES;

PAR M. C.-A. LAISANT.

1. Un récent article de M. Alezais (1) attire l'attention sur une question, d'ailleurs très simple sous sa forme primitive, qui a été l'objet de plusieurs extensions intéressantes, et que nous rappelons : si l'on considère les deux progresssions par différences

(a)	1	3	5	7	9	...
(α)	1	2	3	4	5	...

(1) 1915, p. 64. *Voir* aussi *Correspondance*, 1915, p. 114.

et si l'on prend dans la progression (a) des groupes successifs de termes dont les nombres sont indiqués par les termes de la progression (α), on obtient

$$(1)\quad (3\ 5)\quad (7\ 9\ 11)\quad \ldots$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe est n^3.

2. La généralisation a consisté à étendre la question à des progressions quelconques par différence. On peut la pousser beaucoup plus loin, en considérant des suites de nombres entiers telles que chaque terme soit une fonction de son rang, et qu'on sache en outre déterminer la somme des p premiers termes en fonction de p. C'est le cas, par exemple, d'une progression par quotient, ou de suites obtenues en ajoutant des progressions par quotient terme à terme, etc. Nous pouvons appeler de telles suites entières des *suites sommables*.

Considérons donc deux suites sommables, que nous pouvons écrire

$$(a)\qquad f(1)\quad f(2)\quad f(3)\quad \ldots\quad f(n)\quad \ldots$$
$$(\alpha)\qquad \varphi(1)\quad \varphi(2)\quad \varphi(3)\quad \ldots\quad \varphi(n)\quad \ldots$$

et telles que

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\mathrm{F}(n),$$
$$\varphi(1)-\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\Phi(n).$$

Si nous formons, dans la suite (a) à partir de $f(1)$, des groupes successifs de $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... termes, le rang du dernier terme du $n^{\text{ième}}$ groupe sera $\Phi(n)$; celui du dernier terme du groupe précédent serait $\Phi(n-1)$.

La somme, depuis $f(1)$ jusqu'au dernier terme du $n^{\text{ième}}$ groupe, est donc $\mathrm{F}[\Phi(n)]$ et, par suite, celle des termes de ce $n^{\text{ième}}$ groupe est

$$F[\Phi(n)] - F[\Phi(n-1)].$$

Il est clair que, si l'on avait formé dans la suite (α) des groupes successifs de $f(1), f(2), \ldots$ termes, la solution s'obtiendrait par la permutation des lettres F et Φ.

3. Dans l'exemple très simple rappelé au début, nous avons

$$f(p) = 2p-1, \quad F(p) = p^2, \quad \varphi(p) = p, \quad \Phi(p) = \frac{p(p+1)}{2}$$

et le résultat est par conséquent

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

En prenant au contraire $1, 3, 5, \ldots$ termes dans la progression $1, 2, 3, \ldots$, on aurait

$$(1) \quad (2\ 3\ 4) \quad (5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad \ldots$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe serait donnée par la formule

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2} - \frac{(n-1)^2[(n-1)^2+1]}{2}$$
$$= 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + (n-1)^3.$$

On vérifie en effet que

$$3+5 = 2^3, \qquad 7+9+11 = 3^3, \qquad 13+15+17+19 = 4^3, \ldots,$$
$$2+3+4 = 2^3+1^3, \qquad 5+6+7+8+9 = 3^3+2^3,$$
$$10+11+12+13+14+15+16 = 4^3+3^3, \ldots$$

4. Dans le cas où les deux suites (a) (α) sont identiques, les fonctions F, Φ le sont aussi et le résultat cherché est

$$FF(n) - FF(n-1).$$

Par exemple, on vérifiera que les groupes

$$(1)\quad(2\ 3)\quad(4\ 5\ 6)\quad\ldots$$

ont pour sommes $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$, n indiquant le rang de chacun d'eux, et que dans les suivants

$$(1)\quad(3\ 5\ 7)\quad(9\ 11\ 13\ 15\ 17)\quad\ldots,$$

les sommes sont exprimées par

$$n^4-(n-1)^4\qquad\text{ou}\qquad(2n-1)[n^2+(n-1)^2].$$

Il peut arriver que $F\Phi(n)$ et $\Phi F(n)$ soient identiques, sans que les fonctions F et Φ le soient. Ainsi, dans les deux suites ci-dessous

$$(a)\qquad 1\mid 7\quad 19\quad 37\mid 61\quad 91\quad\ldots,$$
$$(\alpha)\qquad 1\mid 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\quad 13\quad 15\mid\ \ldots$$

les groupes de même rang ont mêmes sommes de termes.

La loi de formation de la suite (a) est facile à reconstituer.

5. Comme dernier exemple, prenons la suite des nombres impairs, et formons des groupes successifs de 1, 4, 9, ... termes, dont les nombres de termes sont les carrés de 1, 2, 3, ...

$$(1)\quad(3\ 5\ 7\ 9)\quad(11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ 23\ 25\ 27)\quad\ldots.$$

On a

$$F(p)=p^2,\qquad \Phi(p)=\frac{p(p-1)(2p+1)}{6},$$

et la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe sera

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2-\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)^2=\frac{(2n^2+1)n^3}{3}.$$