Nouvelles annales de mathématiques

J. Haag

Note sur la torsion

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 108-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__108_1>

[O¹3e]

NOTE SUR LA TORSION;

Par M. J. HAAG,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Imaginons une courbe (C), définie comme arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des fonctions données d'un paramètre t.

Proposons-nous de calculer la torsion $\frac{1}{T}$ de cette courbe. On sait que les coordonnées x, y, z du point de contact du plan (1) avec (C) sont définies par l'équation (1) et les suivantes :

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{2}$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \tag{3}$$

les accents étant des indices de dérivation par rapport à t. Cela posé, désignons par (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. Cette dernière droite est perpendiculaire au plan (1); on a donc

$$a_2 = \lambda A, \qquad b_2 = \lambda B, \qquad c_2 = \lambda C, \tag{4}$$

avec

$$\lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{5}$$

Écrivons maintenant les formules de Frenet :

$$\frac{da_2}{ds} = \frac{a_1}{T}, \qquad \frac{db_2}{ds} = \frac{b_1}{T}, \qquad \frac{dc_2}{ds} = \frac{c_1}{T}. \tag{6}$$

Multiplions-les respectivement par a_1, b_1, c_1 et ajoutons. Il vient

$$\frac{1}{T} = a_1 \frac{da_2}{ds} + b_1 \frac{db_2}{ds} + c_1 \frac{dc_2}{ds}. \tag{7}$$

Or, on sait que

$$a_1 = cb_2 - bc_2, \qquad b_1 = ac_2 - ca_2, \qquad c_1 = ba_2 - ab_2.$$

La formule (7) s'écrit, dès lors,

$$\frac{1}{T} = \begin{vmatrix} \frac{da_2}{ds} & \frac{db_2}{ds} & \frac{dc_2}{ds} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{s'^2} \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Or, les équations (1), (2), (3), dérivées totalement par rapport à t, entraînent les suivantes :

$$(9)\qquad Ax' + By' + Cz' = 0,$$

$$(10)\qquad A'x' + B'y' + C'z' = 0,$$

$$(11)\qquad A''x' + B''y' + C''z' = -(A'''x + B'''y + C'''z + D''') = k,$$

k étant obtenu par élimination de x, y, z entre (1), (2), (3) et (11), ce qui donne

$$(12)\qquad k = -\frac{\Delta}{\delta},$$

en posant

$$(13)\quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Si nous résolvons maintenant le système (9), (10), (11) par rapport à x', y', z', nous avons

$$(14)\qquad x' = \frac{k}{\delta}(BC' - CB'), \qquad y' = \frac{k}{\delta}(CA' - AC'),$$
$$z' = \frac{k}{\delta}(AB' - BA').$$

Portant dans (8) et développant suivant la dernière ligne, il vient

$$(15)\quad \frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2}{s'^2}\frac{k}{\delta}[(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2].$$

Mais, si l'on élève les équations (14) au carré et qu'on les ajoute, on voit que le crochet de (15) égale $\frac{\delta^2}{k^2}s'^2$. Finalement, (15) devient

$$\frac{1}{T} = -\frac{\lambda^2\delta}{k}$$

ou, en tenant compte de (5) et (12),

$$(16)\qquad \frac{1}{T} = \frac{\delta^2}{(A^2 + B^2 + C^2)\,\Delta}.$$

On peut aussi établir cette formule, en partant de la formule bien connue

$$(17)\quad \frac{1}{T} = \frac{-\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

On a, en dérivant (9) et tenant compte de (10),

$$(18)\qquad A x'' + B y'' + C z'' = 0.$$

Dérivons cette équation, ainsi que (10) et tenons compte de (11); nous obtenons

$$(19)\quad A x''' + B y''' + C z''' = -(A' x'' + B' y'' + C' z'') = k.$$

Les équations (9), (18), (19), résolues par rapport à A, B, C, nous donnent

$$(20)\qquad A = \frac{k(y'z'' - z'y'')}{D}, \qquad B = \frac{k(z'x'' - x'z'')}{D},$$
$$C = \frac{k(x'y'' - y'x'')}{D},$$

en désignant par D le déterminant qui est au numérateur de (17). La formule (17) peut alors s'écrire

$$(21)\quad \frac{1}{T} = -\frac{k^2}{D(A^2 + B^2 + C^2)} = -\frac{\Delta^2}{\delta^2 D(A^2 + B^2 + C^2)},$$

en tenant compte de (12).

Faisons maintenant le produit δD, lignes par lignes. On trouve, en tenant compte des équations (9), (10), (11), (18), (19) et posant

$$A''x'' + B''y'' + C''z'' = \mu, \qquad A'x''' + B'y''' + C'z''' = \rho,$$
$$A''x''' + B''y''' + C''z''' = \theta,$$

$$(22) \qquad \delta D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & -k & \mu \\ k & \rho & \theta \end{vmatrix} = k^3 = -\frac{\Delta^3}{\delta^3}.$$

Portant dans (21), on retrouve la formule (16).