Nouvelles annales de mathématiques

F. Balitrand

Sur les courbes de Duporcq et de Mannheim

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 97-106
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__97_0>

[O¹2e]

SUR LES COURBES DE DUPORCQ ET DE MANNHEIM [1];

PAR M. F. BALITRAND

Les courbes de Duporcq sont caractérisées par la propriété suivante :

Leurs normales découpent sur une droite fixe des segments proportionnels aux arcs décrits par leurs points d'incidence.

Les courbes de Mannheim par celle-ci :

Le rapport entre le rayon vecteur issu d'un pôle fixe et le rayon de courbure est constant pour tous les points d'une telle courbe.

La liaison cinématique entre les deux familles de courbes s'établit par le théorème ci-après :

Si une courbe de Mannheim roule sur une de ses tangentes, son pôle décrit une courbe de Duporcq.

Cette proposition résulte immédiatement de la construction, donnée par Mannheim, du centre de courbure d'une courbe de Duporcq ; mais on peut aussi l'établir géométriquement d'une façon directe.

A cet effet, soit O le pôle d'une courbe de Mannheim et M un de ses points. Menons la tangente MT en ce point. Prenons sur la courbe un point M′, infiniment voisin du point M, et sur la tangente un point M_1 tel que $MM_1 =$ arc MM′. Si la courbe roule sur la droite, le

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 1902, p. 181-184, 337-343 et 481-482.

point M′, après un déplacement infiniment petit, viendra en M_1 et, en même temps, le point O viendra en O_1. On a

$$\text{arc } OO_1 = OM \times \widehat{OMO_1}.$$

Mais l'angle $\widehat{OMO_1}$ n'est autre que l'angle $\widehat{M'MM_1}$; c'est-à-dire que l'angle de contingence de la courbe au point M. Il est donc égal à

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{MM'}{\rho} = \frac{MM_1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe au point M. Par hypothèse, $\frac{OM}{\rho}$ est constant; donc $\frac{OO_1}{MM_1}$ l'est aussi. D'autre part, $O_1 M_1$ est la normale en O_1 à la courbe lieu du point O, qui, par suite, est bien une courbe de Duporcq.

Cela posé, prenons comme axes de coordonnées mobiles la tangente Ox et la normale Oy à la courbe, lieu du point O et rappelons les formules de Cesàro :

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho},$$

x et y désignant les coordonnées d'un point du plan par rapport aux axes mobiles; les caractéristiques δ et d se rapportent au déplacement absolu et au déplacement relatif du point (x, y); l'arc s de la courbe (O) a été choisi pour variable indépendante.

Soit P le point où la normale Oy rencontre la droite fixe que nous appellerons désormais *directrice*. Désignons par λ le segment OP. Les formules précédentes appliquées au point P (o, λ) donnent

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{\lambda}{\rho} = k \cos \theta, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \lambda' = k \sin \theta,$$

auxquelles il faut joindre, puisque le point P décrit une droite,

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta' = -\frac{1}{\rho}; \tag{2}$$

k désigne le rapport, constant par hypothèse, des arcs décrits par les points P et O ; θ représente l'angle de la directrice avec la tangente Ox.

Ces formules suffisent pour l'étude des courbes de Duporcq. La première des relations (1) conduit immédiatement à la construction du centre de courbure donnée par Mannheim (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 337).

Sur la perpendiculaire élevée en P *à la directrice prenons* $PQ = k.OP$. *La droite* OQ *coupe en* R *la parallèle à* Ox *menée par* P; *la parallèle à* PQ, *menée par* R, *rencontre la normale* Oy *au centre de courbure* C.

Soit G la projection du point Q sur OP. On a

$$OG = \lambda - k\lambda \cos\theta = \frac{\lambda^2}{\rho}, \tag{3}$$

d'où une nouvelle construction du centre de courbure.

Sur GQ *prenons* Q_1 *tel que* $OQ_1 = OP$; *la perpendiculaire élevée en* Q_1 *à* OQ_1 *passe au centre de courbure* C.

On peut encore remarquer qu'en appelant P_1 le symétrique de P par rapport à O, les quatre points P_1, G, P, C forment une division harmonique.

En différentiant la première des relations (1) et tenant compte de la seconde, on arrive à l'équation

$$\frac{2\lambda'}{\lambda} = \frac{\rho'}{\rho},$$

ou bien

$$\lambda^2 = \alpha\rho,$$

α désignant une constante. Cette formule est due à Duporcq. Il est intéressant de rechercher la signification géométrique de la constante α. La formule (3) montre que $\alpha = \mathrm{OG}$ et par conséquent que OG est une constante. Ainsi :

La projection du point Q *sur la normale décrit une courbe parallèle à la courbe* (O).

Les coordonnées du point Q sont :

$$x = k\lambda \sin\theta = \lambda\lambda', \qquad y = \alpha.$$

De la relation $\lambda^2 = \alpha\rho$ on déduit

$$2\lambda\lambda' = \alpha\rho' = \alpha\frac{\rho_1}{\rho},$$

et, par suite, la droite OQ a pour équation

$$y = \frac{2\rho}{\rho_1}x,$$

ρ_1 désignant le rayon de courbure de la développée de O. La droite OQ passe donc par le milieu de ce rayon de courbure et par suite :

Le rayon de courbure de la développée de (O) *s'obtient en doublant le segment déterminé sur la normale à cette développée par la droite* OQ.

En additionnant les formules (1) après les avoir élevées au carré, et tenant compte de $\lambda^2 = \alpha\rho$, on arrive à

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = k^2,$$

ou bien

$$(4) \qquad ds = \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{k^2\lambda^2 - (\lambda - \alpha)^2}}.$$

Cette relation est due à Duporcq. Elle peut toujours être intégrée et en y remplaçant ensuite λ par $\sqrt{\alpha\rho}$ on obtient l'équation intrinsèque des courbes en question sous forme finie. Le résultat est assez compliqué. La marche suivie ici a l'avantage de mettre en évidence la signification géométrique des constantes de l'équation (4).

Par un point fixe I menons des rayons vecteurs égaux et parallèles aux segments de normales d'une courbe de Duporcq, compris entre la courbe et sa directrice, et proposons-nous d'étudier la courbe lieu des extrémités de ces segments.

Nous emploierons des coordonnées polaires; le point I étant le pôle, l'axe polaire étant parallèle à la directrice, et nous désignerons par ω l'angle polaire.

Il est commode d'employer les valeurs de λ, λ', λ'', ..., ρ, ρ_1, ρ_2 en fonction de l'angle θ.

Ces valeurs sont les suivantes :

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta' = -\frac{1 - k\cos\theta}{\alpha},$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{1 - k\cos\theta}, \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \lambda' = k\sin\theta,$$

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \lambda'' = -\frac{k\cos\theta\,(1 - k\cos\theta)}{\alpha},$$

$$\rho = \frac{\alpha}{(1 - k\cos\theta)^2}, \qquad \frac{d\rho}{ds} = \rho' = \frac{2k\sin\theta}{1 - k\cos\theta},$$

$$\rho_1 = \frac{2k\alpha\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^3}, \qquad \rho_2 = \frac{2k\alpha(k - \cos\theta + 2k^2\sin^2\theta)}{(1 - k\cos\theta)^4}.$$

On a aussi

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\rho\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{k\alpha\sin\theta}{(1 - k\cos\theta)^2}.$$

Cela posé, l'angle que fait la tangente en un point de la courbe avec le rayon vecteur est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{k\,d\omega}{d\lambda} = -\frac{1 - k\cos\theta}{k\sin\theta}.$$

Mais si l'on appelle φ l'angle que la normale de la courbe de Duporcq correspondante fait avec la droite OQ, le triangle OGQ donne

$$\frac{GQ}{GO} = \frac{k\sin\theta}{1 - k\cos\theta} = \operatorname{tang}\varphi\,;$$

donc

$$\operatorname{tang} V = -\cot\varphi = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

et la tangente cherchée est perpendiculaire à la droite OQ.

Le rayon de courbure est donné par la formule

$$R = \frac{\left[\lambda^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + 2\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)^2 - \lambda\frac{d^2\lambda}{d\omega^2}}.$$

Le numérateur et le dénominateur de cette expression se calculent aisément en fonction de θ, et, après quelques réductions, on arrive à la valeur suivante pour R :

$$R = \frac{\alpha}{\cos^3\varphi}. \tag{5}$$

Par suite, si l'on projette G en G_1 sur OQ, puis G_1 en G_2 sur OP, et enfin G_2 en G_3 sur OQ, le segment OG_3 est égal au rayon de courbure R.

Passons maintenant aux courbes de Mannheim. Soient O le pôle et M un point de la courbe (M). Prenons pour axes de coordonnées mobiles la tangente Mx et la normale My en M à la courbe (M).

Des formules de Cesàro on déduit, pour exprimer les conditions de fixité du point (x, y), les conditions

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

ou en coordonnées polaires (r, θ)

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \qquad \frac{\sin\theta}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho}.$$

En les appliquant au pôle O, et en tenant compte de la relation $\rho = kr$, on obtient successivement :

$$\frac{d\rho}{ds} = k\frac{dr}{ds} = -k\cos\theta,$$
$$\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{k\sin\theta - 1}{k\rho\cos\theta},$$
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{k\cos\theta\, d\theta}{k\sin\theta - 1} = 0;$$

d'où, par intégration de cette dernière,

$$\rho(k\sin\theta - 1) = a, \tag{6}$$

a désignant une constante.

On arrive aussi aisément à la relation

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = k^2 - \left(1 + \frac{a}{\rho}\right)^2,$$

ou bien

$$ds = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{k^2\rho^2 - (\rho + a)^2}}, \tag{7}$$

qui n'est autre que l'équation différentielle intrinsèque des courbes de Mannheim. Elle peut toujours se mettre sous forme finie, mais elle est alors assez compliquée. Elle se simplifie lorsque $k = 1$. En faisant le changement de variable $\sqrt{2\rho + a} = \frac{1}{z}$, on arrive aisément à l'expression

$$s = \frac{(\rho - a\ \sqrt{2\rho + a}}{3\sqrt{-a}}.$$

On peut encore remarquer que l'équation (7) est identique à celle qui, pour les courbes de Duporcq, relie l'arc de la courbe au segment de normale compris entre la directrice et le point d'incidence.

Les développées des courbes de Mannheim ont une équation intrinsèque remarquable. Les formules qui permettent de passer d'une courbe à sa développée sont les suivantes :

$$s_1 = \rho, \qquad \rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds};$$

en les appliquant à l'équation (7), on obtient :

$$\rho_1^2 = (k^2 - 1)\, s_1^2 - 2\, a s_1 - a^2.$$

Ces courbes sont des épicycloïdes ou des hypocycloïdes. Pour $k = 1$, on a une développante de cercle. Ainsi :

Les courbes de Mannheim sont des développantes d'épi- ou d'hypocycloïdes.

La formule $\frac{d\rho}{ds} = - k \cos\theta$ peut s'écrire

$$\rho_1 + k\rho\cos\theta = 0.$$

Or, si l'on projette le centre de courbure C en γ sur le rayon vecteur, on a $C\gamma = \rho\cos\theta$; le rayon de courbure de la développée de (M) est donc égal à k fois $C\gamma$.

La relation $\rho(k\sin\theta - 1) = a$ peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad k(\rho\sin\theta - r) = a.$$

Elle nous montre que le point γ décrit un cercle de centre O et de rayon a. Ce théorème est dû à Mannheim et l'équation (8) fournit une interprétation géométrique de la constante d'intégration a.

La même relation peut encore s'écrire

$$kr \sin\theta - r = \frac{a}{k},$$

ou, en appelant p la distance du pôle à la tangente en M,

$$r = kp - \frac{a}{k}.$$

Les courbes de Mannheim sont donc caractérisées par la propriété suivante :

Il existe une relation linéaire entre les distances du pôle à un point de la courbe et à la tangente en ce point.

Cela va nous permettre de trouver l'équation différentielle de ces courbes en coordonnées polaires.

Prenons pour origine le pôle et pour axe polaire une droite quelconque passant par ce point. Soit ω l'angle polaire. En remarquant que θ désigne l'angle de la tangente à la courbe avec le rayon vecteur, on a

$$p = r \sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{r\,d\omega}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\omega^2}}.$$

On en déduit sans peine

$$k^2 p^2 = k^2 r^2 \sin^2\theta = \frac{k^2 r^4\,d\omega^2}{dr^2 + r^2\,d\omega^2} = \left(r + \frac{a}{k}\right)^2,$$

d'où

$$(9) \qquad d\omega = \frac{dr\left(r + \frac{a}{k}\right)}{r\sqrt{k^2 r^2 - \left(\quad \frac{a}{k}\right)^2}}.$$

c'est l'équation différentielle cherchée.

Il est, d'autre part, évident que, pour toute courbe de Mannheim :

Il existe une relation linéaire, en chacun de ses points, entre le rayon de courbure et la distance de la tangente à un pôle fixe.

Divisons (9) par (7), après avoir remplacé r par $\frac{\rho}{k}$, nous obtenons

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}.$$

Les courbes de Mannheim sont donc un cas particulier de celles qui ont été étudiées par M. Haag (*Nouvelles Annales*, 1913, p. 397 et suiv.). Elles correspondent au cas où $f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{a}{\rho^2}$.