NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1913)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 81-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__81_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1913).

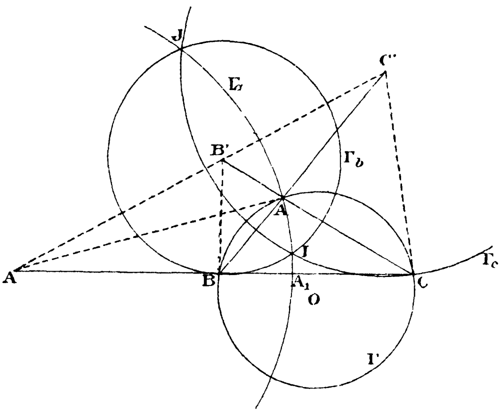
Mathématiques élémentaires.

Soit T *un triangle dont les sommets sont* A, B, C; *soit* Γ *le cercle circonscrit à* T. *On sait qu'il y a deux cercles tangents à* Γ *en* A *et qui touchent* BC : *l'un, en un point* A_1 *situé entre* B *et* C, *l'autre en un point* A_2 *extérieur au segment* BC.

1° *Construire le triangle* T *connaissant les longueurs* AA_1, AA_2 *et le côté* BC.

2° *Soit* A' *le milieu de* A_1A_2. *Calculer la lon-*

gueur AA′ *en fonction des longueurs a, b, c, des côtés de* T (*on supposera* $a > b > c$). *Trouver la relation qui existe entre la longueur* AA′ *et les deux autres longueurs analogues* BB′ *et* CC′.



3° *Calculer en fonction de a, b, c, les distances des points* A′, B′, C′, *deux à deux.*

4° *Soit* Γ_a *le cercle décrit de* A′ *comme centre avec* AA′ *comme rayon; soient* Γ_b *et* Γ_c *les deux autres cercles analogues. Démontrer que ces trois cercles se coupent en deux points* I *et* J. *Calculer les angles sous lesquels ces cercles se coupent deux à deux. Indiquer la situation précise des centres de similitude de ces cercles deux à deux. Quelles sont les particularités du triangle* A″ B″ C″ *dont les sommets sont les points homologues de* A, B, C, *dans une inversion de pôle* I?

5° *Calculer la longueur de la corde* IJ *et la distance du centre* O *de* Γ *à la droite* A′B′, *en fonction de a, b, c.*

6° *On donne les points* A′, B′, C′. *Démontrer qu'il* *existe une infinité de triangles* T *correspondants et construire ceux de ces triangles qui répondent à une valeur donnée du rayon de* Γ.

SOLUTION PAR M. THIÉ.

1° Considérons par exemple le cercle tangent à Γ en A et qui touche BC en A_1. Ce cercle rencontre AB et AC respectivement en deux points β et γ tels que βγ soit parallèle à BC, puisque A est un centre de similitude de Γ et du cercle dont il s'agit. A_1 est donc milieu de l'arc βγ et l'on en conclut que AA_1 est la bissectrice intérieure de l'angle BAC.

On reconnaît de même que AA_2 est la bissectrice extérieure de l'angle BAC.

Le point de rencontre A′ de BC avec la tangente en A à Γ est le milieu de A_2A_1, puisque l'on a

$$A_2A' = A'A = A\,A_1.$$

Si l'on se donne les longueurs AA_1 et AA_2, on peut construire le triangle AA_1A_2, rectangle en A. On a ensuite

$$A'B.A'C = \overline{A'A_1}^2, \qquad A'C - A'B = BC.$$

On est donc ramené au problème classique : *construire deux segments connaissant leur différence et leur produit.* On peut aussi donner la solution suivante : Comme B et C divisent harmoniquement le segment A_1A_2, le cercle de diamètre BC coupe orthogonalement le cercle de diamètre A_1A_2. Le système de ces deux cercles, tous deux de grandeur connue, se construit aisément, et la construction s'achève immédiatement. Le problème est toujours possible. Il n'a qu'une solution, s'il est bien spécifié que le point A doit être intérieur, et le point A extérieur à BC. Il en aurait deux dans l'hypothèse contraire.

2° On a $AA' = \frac{1}{2} A_2A_1$. Or, la longueur du segment A_2A_1 est facile à évaluer, les points A_2 et A_1 divisant BC, extérieurement et intérieurement, dans le rapport $\frac{c}{b}$. On a

$$A_2C = \frac{ab}{b-c}, \qquad A_1C = \frac{ab}{b+c},$$

d'où

$$A_2A_1 = \frac{2abc}{b^2 - c^2}$$

et

$$(1) \qquad AA' = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

On trouvera de même, en ayant égard aux hypothèses faites dans l'énoncé sur les grandeurs relatives de a, b, c,

$$(2) \qquad BB' = \frac{abc}{a^2 - c^2},$$

$$(3) \qquad CC' = \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Au moyen de ces expressions, on forme aisément la relation

$$(4) \qquad \frac{1}{BB'} = \frac{1}{AA'} + \frac{1}{CC'}.$$

On reconnaît encore que les points A', B', C' sont en ligne droite (théorème connu). Signalons aussi les relations

$$(5) \qquad \frac{A'B}{A'C} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{B'C}{B'A} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{C'A}{C'B} = \frac{b^2}{a^2},$$

qui résultent des propriétés connues des divisions harmoniques.

3° Calculons $B'C'$. On peut appliquer le théorème de Stewart. On peut aussi procéder comme il suit : posons pour un moment

$$B'A = Kb, \qquad C'A = K'c.$$

On a

$$\overline{B'C'}^2 = K^2b^2 + K'^2c^2 - 2KK'bc\cos A;$$

mais

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

On en tire, par élimination de $\cos A$,

$$\overline{B'C'}^2 = KK'a^2 + (K - K')(Kb^2 - K'c^2)$$

Mais

$$K = \frac{c^2}{a^2 - c^2}, \qquad K' = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

On trouve, tous calculs faits,

$$B'C' = \frac{abc}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}P, \tag{6}$$

en posant

$$P = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}.$$

On trouvera de même

$$A'C' = \frac{abc}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}P, \tag{7}$$

$$A'B' = \frac{abc}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}P. \tag{8}$$

$B'C'$, $A'C'$ et $A'B'$ sont positifs, et l'on a $A'C' > A'B'$, ce qui prouve que le point B' est entre les points A' et C'.

En comparant les formules (1), (2), (3) et (6), (7), (8), on voit encore qu'on a

$$AA'.B'C' = BB'.A'C' = CC'.A'B'. \tag{9}$$

4° Le cercle Γ_a est le lieu des points M tels qu'on ait

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b},$$

ou

$$bMB = cMC.$$

Les cercles Γ_b et Γ_c sont susceptibles de définitions analogues. Si donc I est l'un des points de rencontre de ces deux derniers cercles, on a

$$aIA = bIB = cIC,$$

d'où l'on conclut que le point I appartient au cercle Γ_a. De même, le second point d'intersection J des deux cercles Γ_b et Γ_c. On verra plus loin que les points I et J sont réels.

On peut remarquer aussi que, B_1, B_2, C_1, C_2 étant les points analogues aux points A_1 et A_2, les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c ont pour diamètres respectifs les diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre droites $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$, $A_1B_1C_2$, $A_2B_2C_2$. Il en résulte, en vertu d'un théorème bien connu, qu'ils ont deux points communs.

Comme les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c coupent orthogonalement le cercle Γ, le centre O de celui-ci appartient à leur axe radical commun. Les trois points O, I, J sont donc en ligne droite.

Considérons maintenant une inversion de pôle A′ et de puissance $\overline{A'A}^2$ ou, plus brièvement, une inversion par rapport au cercle Γ_a. Cherchons l'inverse du cercle Γ_b. C'est un cercle qui doit passer par les points I et J, communs à Γ_a et à Γ_b, et par le point C, homologue du point B. Ce cercle se confond donc avec Γ_c. On voit de même que :

Deux quelconques des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c sont inverses par rapport au troisième.

Il résulte de là que deux de ces cercles coupent le troisième sous le même angle. Autrement dit, leurs tangentes, en l'un de leurs points communs, sont telles que chacune est la bissectrice de l'angle formé par les deux autres. Cela exige nécessairement que :

Les trois cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c *se coupent mutuellement sous des angles de* 60°.

On voit aussi que le centre de chacun des trois cercles est l'un des centres de similitude des deux autres [cela résultait déjà des formules (9)]. L'examen de la disposition des trois points A', B, C' montre que le premier et le troisième sont des centres de similitude *externes*, et que le second est un centre de similitude *interne*. Les autres centres de similitude se trouvent aisément. Par exemple, le centre de similitude interne des cercles Γ_b et Γ_c est le conjugué harmonique de A' par rapport à B'C'. Il est donc sur la polaire du point A' par rapport à l'angle formé par les deux droites BB' et CC' (polaire qui se confond avec celle du point A' par rapport au cercle Γ). Cette polaire est la droite qui joint le point A au point qui divise intérieurement BC dans le rapport $\frac{c^2}{b^2}$. C'est donc, en vertu d'une propriété connue, une *symédiane* du triangle ABC.

Remarquons maintenant que le cercle BIC, de même que tout cercle passant par les points B et C, coupe orthogonalement le cercle Γ_a. Les cercles CIA, AIB jouissent de propriétés analogues. Ils se coupent donc mutuellement sous des angles de 60°. Si l'on fait une inversion de pôle I, transformant les points A, B, C en A'', B'', C'', la droite B''C'' est l'inverse du cercle BIC, etc. Les trois droites B''C'', C''A'', A''B'' se coupent donc mutuellement sous des angles de 60°, et le *triangle* A'' B'' C'' est *équilatéral*.

5° Les points I et J sont symétriques par rapport à B′C′. Donc IJ est le double de la hauteur du triangle IB′C′. En évaluant de deux manières différentes l'aire de ce triangle, et en se rappelant que l'angle B′IC′ est de 60°, on a

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{B'C'.IJ} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{IB'.IC'}.$$

Mais $\mathrm{IB'} = \mathrm{B'B}$, $\mathrm{IC'} = \mathrm{C'C}$. On a donc, en tenant compte des valeurs (2), (3) et (6),

$$\mathrm{IJ} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{a^2 - c^2}\,\frac{abc}{a^2 - b^2}\,\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{abc\,\mathrm{P}} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{\mathrm{P}}.$$

IJ étant réel, les deux points I et J sont aussi réels (car, s'ils étaient imaginaires, leur distance serait une imaginaire pure).

Soit D la distance du point O à la droite A′B′C′. On a

$$2\mathrm{D} = \mathrm{OI} + \mathrm{OJ}.$$

mais $\mathrm{OI.OJ} = \mathrm{R}^2$, R étant le rayon de Γ, et

$$|\,\mathrm{OI} - \mathrm{OJ}\,| = \mathrm{IJ} = \sqrt{3}\,\frac{abc}{\mathrm{P}}.$$

Donc

$$4\mathrm{D}^2 = \frac{3\,abc}{\mathrm{P}^2} + 4\mathrm{R}^2.$$

Or

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\mathrm{S}},$$

S étant l'aire du triangle *abc*.

Finalement

$$4\mathrm{D}^2 = abc\left(\frac{3}{\mathrm{P}^2} + \frac{1}{4\mathrm{S}^2}\right).$$

6° Étant donnés les points A′, B′, C′, le point **I**, tel que les angles B′IC′ et A′IB′ soient de 60° se construit aisément. On connaît donc les cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c.

Proposons-nous alors de construire le triangle ABC, connaissant le rayon R du cercle Γ. Le centre O de ce cercle doit appartenir à IJ, et être tel qu'on ait

$$OI.OJ = R^2.$$

On peut donc construire le point O de deux manières.

Le cercle Γ étant connu, il coupe chacun des cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c en deux points. Ces points, associés convenablement, donnent deux triangles ABC satisfaisants. En effet, soit B l'un des points où Γ rencontre Γ_b. Dans une inversion par rapport au cercle Γ_a, Γ se transforme en lui-même et Γ_b se transforme en Γ_c. Donc, au point B correspond l'un des deux points C où Γ rencontre Γ_c. De même, le point B détermine sans ambiguïté le point A. Il reste à vérifier que AC passe bien par B'. Or cela résulte immédiatement de ce que AA', CC', BB' sont les tangentes en A, C, B au cercle Γ. Les deux premières rencontrant les côtés BC et AB respectivement aux points A' et C', le point de rencontre B' de la tangente en B et de A'C' doit nécessairement appartenir à AC.

En résumé, étant donné le rayon du cercle Γ, on trouve *quatre* triangles satisfaisants, deux à deux symétriques par rapport à A'B'C'. Si l'on fait varier R, on trouve une infinité de triangles répondant à la question.