NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur une configuration connue (9 points, 12 droites) ; points d'inflexion d'une cubique plane

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 69-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__69_0>

[K¹13a]

SUR UNE CONFIGURATION CONNUE (9 POINTS, 12 DROITES); POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE PLANE;

Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. Dans une Note précédente [1], j'ai considéré une configuration connue (9 points, 9 droites). Les neuf points étant ceux du Tableau

$$\begin{array}{l|lll} & A & A' & A'' \\ & B & B' & B'' \\ \downarrow & C & C' & C'' \end{array}$$

chacune des neuf droites qui joignent un point de la première ligne à un point de la seconde passe par un point de la troisième (*fig.* 1). *Si l'on veut que la droite joignant deux quelconques des neuf points passe par un troisième*, il faudra que chaque ligne horizontale du Tableau donne encore trois points alignés (on verra que la figure ne peut alors être réelle). Les douze droites sont :

$$\begin{array}{ll} (1) & (A B C,\ A'B'C',\ A''B''C''), \\ (2) & (A B'C'',\ A'B''C,\ A''B\ C'), \\ (3) & (A B''C',\ A'B\ C'',\ A''B'C\ ), \\ (4) & (A A'A'',\ B\ B'B'',\ C\ C'C''); \end{array}$$

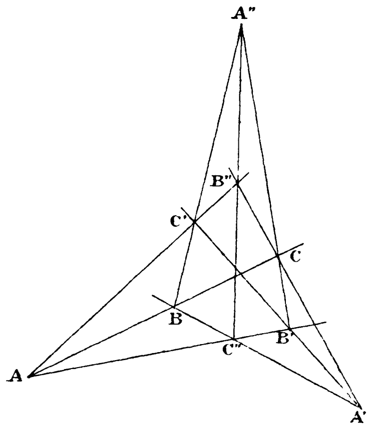
elles correspondent aux colonnes du Tableau ci-dessus, à ses lignes, aux termes positifs du déterminant symbo-

[1] Même numéro, p. 64.

lique donné par ce Tableau à ses termes négatifs (règle de Clebsch pour les neuf points d'inflexion d'une cubique plane).

Les neuf conditions relatives à la configuration précédemment étudiée se réduisent à huit, comme on l'a vu.

Fig. 1.



Les trois conditions nouvelles qu'on impose ici se réduisent à deux, et ce fait est une conséquence du premier. En effet, si l'on considère le Tableau

$$\left|\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C', \\ A'' & B'' & C'' \end{array}\right.$$

il arrive déjà que chacun des six alignements

$$AB'C'',\ BC'A'',\ CA'B'',$$
$$AB''C',\ BC''A',\ CA''B'$$

est réalisé ; dès lors, deux des alignements

$$AA'A'',\quad BB'B'',\quad CC'C''$$

entraînent le troisième. *Ainsi, les douze conditions apparentes se réduisent à dix conditions distinctes; le système dépend de huit paramètres.*

2. Avant d'aller plus loin, il nous sera commode de modifier pour un certain temps la notation. On a remarqué précédemment que, dans la configuration primitive, les trois triangles

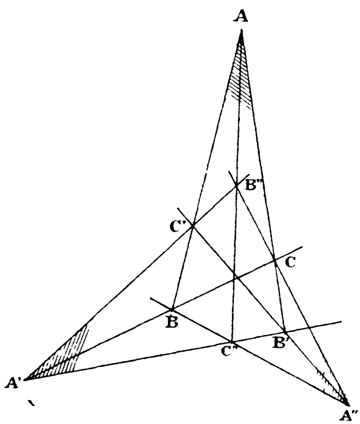
$$A''BC,\quad AB'C',\quad A'B''C'',$$

par exemple, sont tels que le premier est circonscrit au second, le second au troisième, le troisième au premier. Si l'on remplace les notations A″, A, A′ par les notations A, A′, A″, les trois triangles

$$ABC,\quad A'B'C',\quad A''B''C''$$

seront tels (*fig.* 2) que le premier est circonscrit au

Fig. 2.



second, etc. On aura de plus ici les alignements AA′A″, BB′B″, CC′C″. C'est cette notation qui va se présenter naturellement à nous dans la recherche suivante.

Proposons-nous *a priori* de déterminer un système de neuf points tel que la droite joignant deux quelconques de ces points passe par un troisième.

Comme il doit passer quatre droites par chaque point, le nombre de ces droites sera $\frac{9 \times 4}{3} = 12$. Si A, B, C sont trois des neuf points qui ne sont pas en ligne droite, chacun des côtés BC, CA, AB doit porter un troisième point du système ; soient A', B', C' les points en question. Les trois derniers points A'', B'', C'' doivent être d'une part sur les droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, d'autre part sur les droites AA', BB', CC', puisque chacune de ces six droites ne porte jusqu'à présent que deux points du système ; par suite A'', B'', C'' sont les intersections respectives des droites $B'C'$ et AA', $C'A'$ et BB', $A'B'$ et CC'. Mais on n'a, jusqu'à présent, que neuf droites, et il faut encore que le triangle $A''B''C''$ soit circonscrit au triangle ABC, car la droite AB'', par exemple, ne peut contenir aucun des points B, C, B', C', A', A'', et cette droite doit passer en C''. Finalement, les trois triangles ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sont tels que le premier est circonscrit au second, etc. et l'on a en outre les alignements $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$; le système indiqué au début de cette Note est le seul qui réponde à la question.

3. Conservons les mêmes notations. Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, les coordonnées des points A', B', C' seront

$$(0,\ a,\ 1),\quad (1,\ 0,\ b),\quad (c,\ 1.\ 0).$$

Celles des points A'', B'', C'' seront de la forme

$$(m,\ a,\ 1),\quad (1,\ n,\ b),\quad (c,\ 1,\ p),$$

en tenant compte des alignements $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, et l'on aura les conditions

$$m = \frac{abc+1}{b}, \qquad n = \frac{abc+1}{c}, \qquad p = \frac{abc+1}{a},$$

en exprimant que le triangle $A''B''C''$ est inscrit au triangle $A'B'C'$; la première condition exprime, par exemple, que les points A'', B', C' sont en ligne droite

$$\begin{vmatrix} m & a & 1 \\ 1 & 0 & b \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$abc + 1 = \omega,$$

on a pour les coordonnées des points A'', B'', C'',

$$\left(\frac{\omega}{b}, a, 1\right), \quad \left(1, \frac{\omega}{c}, b\right), \quad \left(c, 1, \frac{\omega}{a}\right).$$

On a jusqu'ici neuf conditions. Il faut maintenant que le triangle $A''B''C''$ soit circonscrit au triangle ABC, et nous savons déjà que les trois conditions impliquées par cet énoncé se réduisent à une seule.

On le vérifie aisément. Supposons que les points A, B'', C'' soient en ligne droite, et considérons le Tableau

$$\begin{array}{|lll} B & C'' & A'' \\ B' & C & A \\ B'' & C' & A'; \end{array}$$

les huit alignements autres que l'alignement C, A'', B'' ayant lieu par hypothèse, ce dernier a lieu aussi. En considérant le Tableau

$$\begin{array}{|lll} C & A'' & B'' \\ C' & A & B \\ C'' & A' & B', \end{array}$$

on voit de même que les points $BC''A''$ sont en ligne droite.

Analytiquement, le fait que les points A, B'', C'' sont en ligne droite, se traduit par l'égalité

$$\frac{\omega}{c} : b = 1 : \frac{\omega}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega}{bc} = \frac{a}{\omega};$$

on doit donc avoir, en se rappelant la définition de ω,

$$(5) \qquad abc = \omega^2, \qquad \omega^2 - \omega + 1 = 0,$$

ω *étant ainsi une racine cubique imaginaire de l'unité négative*. On peut écrire pour les coordonnées des points A'', B'', C''

$$\left(1, \frac{\omega}{c}, \frac{b}{\omega}\right), \quad \left(\frac{c}{\omega}, 1, \frac{\omega}{a}\right), \quad \left(\frac{\omega}{b}, \frac{a}{\omega}, 1\right).$$

Les huit paramètres du système sont les six paramètres des points A, B, C, et deux des trois quantités a, b, c liées par la relation (5).

Les quatre droites ABC', AB'C, AB''C'', AA'A'' issues du point A, ont pour équations

$$z = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{y}{z} = \frac{a}{\omega}, \qquad \frac{y}{z} = a;$$

des six rapports anharmoniques fournis par ces quatre droites, trois sont égaux à l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité négative, et les trois autres à la racine conjuguée : un tel faisceau de quatre droites est dit *équianharmonique* [1].

4. Les neuf points considérés sont les pivots d'un

[1] Avec des axes de coordonnées quelconques Ax, Ay, les coefficients angulaires des quatre droites sont racines d'une équation du quatrième degré dont l'invariant S est nul (SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 269).

faisceau de cubiques planes, puisque ce sont les intersections de trois droites par trois autres (et cela de six manières) ; *toutes ces cubiques ont pour point d'inflexion les points en question*. Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, l'équation

$$(6)\quad \mathrm{A}cyz(y-az)+\mathrm{B}azx(z-bx)+\mathrm{C}bxy(x-cy)-xyz=0$$

représente en effet des cubiques qui passent par les points A, B, C et par les points A′, B′, C′ ; si l'on écrit qu'elles passent par les points A″, B″, C″, on a les conditions

$$\frac{\mathrm{B}}{\omega}+\mathrm{C}=1,\qquad \frac{\mathrm{C}}{\omega}+\mathrm{A}=1,\qquad \frac{\mathrm{A}}{\omega}+\mathrm{B}=1,$$

lesquelles se réduisent à deux. On constate facilement que le point A, par exemple, est un point d'inflexion, la tangente étant $\mathrm{C}y=\mathrm{B}az$; il en est de même des points B et C ; comme les trois triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″ jouent le même rôle, les neuf points sont des points d'inflexion. On retrouve bien les neuf paramètres d'une cubique, puisque a, b, c doivent vérifier la relation $abc=\omega^2$.

Le résultat précédent ne diffère que par la forme de celui-ci qui est dû à Hesse : toute cubique menée par les neuf points d'inflexion d'une cubique a aussi ces points pour points d'inflexion. (En particulier, la hessienne d'une cubique a les mêmes points d'inflexion que la courbe elle-même.)

II.

5. Nous reprendrons ici les notations primitives. Prenons comme triangle de référence l'un des quatre triangles qui ont pour côtés les quatre groupes de trois

droites :

(1) $(ABC, A'B'C', A''B''C'')$,

(2) $(\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$,

(3) $(\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$,

(4) $(AA'A'', BB'B'', CC'C'')$;

ces triangles, dont chacun porte sur ses côtés les neuf points considérés, sont appelés *triangles inflexionnels* dans la théorie des cubiques. Prenons, par exemple, le triangle LMN dont les côtés portent respectivement les points A, A′, A″, les points B, B′, B″, les points C, C′, C″.

Si θ est une racine cubique imaginaire de l'unité positive, on peut réprésenter les neuf points par les relations

$$\frac{AM}{AN} = \alpha, \qquad \frac{A'M}{A'N} = \theta\alpha, \qquad \frac{A''M}{A''N} = \theta^2\alpha,$$
$$\frac{BN}{BL} = \beta, \qquad \frac{B'N}{B'L} = \theta\beta, \qquad \frac{B''N}{B''L} = \theta^2\beta,$$
$$\frac{CL}{CM} = \gamma, \qquad \frac{C'L}{C'M} = \theta\gamma, \qquad \frac{C''L}{C''M} = \theta^2\gamma,$$

avec

(7) $$\alpha\beta\gamma = 1;$$

on a bien huit paramètres.

Voici la démonstration. On a pour les coordonnées du point A, par exemple,

$$x = 0, \qquad \frac{z}{y} = -\alpha\frac{\sin\widehat{M}}{\sin\widehat{N}},$$

ou, en remplaçant α, β, γ par $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\nu}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\mu}$,

$$x = 0, \qquad \mu\sin\widehat{M}.y = -\nu\sin\widehat{N}.z;$$

en posant

$$X = \lambda\sin\widehat{L}.x, \qquad Y = \mu\sin\widehat{M}.y, \qquad \ldots,$$

les coordonnées X, Y, Z des neuf points sont :

$$\begin{array}{lll}
(\;0,\;\;1,\;-1), & (\;0,\;\;1,\;-\theta), & (\;0,\;\;1,\;-\theta^2),\\
(-1,\;\;0,\;\;1), & (-\theta,\;\;0,\;\;1), & (-\theta^2,\;\;0,\;\;1),\\
(\;1,\;-1,\;\;0), & (\;1,\;-\theta,\;\;0), & (\;1,\;-\theta^2,\;\;0).
\end{array}$$

Conformément au Tableau de Clebsch

$$\begin{array}{c}
A\,A'\,A''\\
B\,B'\,B''\\
C\,C'\,C'',
\end{array}$$

les quatre systèmes de trois droites auxquels donnent lieu les douze points sont :

$$\begin{array}{llll}
(1) & X+Y+Z=0, & X+\theta^2 Y+\theta Z=0, & X+\theta Y+\theta^2 Z=0,\\
(2) & \theta^2 X+Y+Z=0, & X+Y+\theta^2 Z=0, & X+\theta^2 Y+Z=0,\\
(3) & \theta X+Y+Z=0, & X+\theta Y+Z=0, & X+Y+\theta Z=0,\\
(4) & X=0, & Y=0, & Z=0.
\end{array}$$

6. L'équation générale des cubiques passant par les neuf points est

$$(X+Y+Z)(X+\theta^2 Y+\theta Z)(X+\theta Y+\theta^2 Z)+h\,XYZ=0,$$

ou

$$(8)\qquad X^3+Y^3+Z^3-3k\,XYZ=0\,;$$

c'est l'équation canonique habituelle. On vérifie que la droite $X=0$ contient trois points d'inflexion en mettant l'équation sous la forme

$$(kX+Y+Z)(kX+\theta^2 Y+\theta Z)(kX+\theta Y+\theta^2 Z)=(k^3-1)X^3\,;$$

les tangentes aux points d'inflexion A, A', A'' sont en évidence.

III.

7. Le Tableau de Clebsch peut être écrit sous la forme

$$\begin{array}{ccc} 00 & 01 & 02 \\ 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22, \end{array}$$

chacun des neuf points étant désigné par deux nombres (comme un élément d'un déterminant). *Trois des neuf points sont alors en ligne droite si la somme des premiers indices, aussi bien que celle des seconds, est multiple de* 3. Les couples numériques 00, 01, ... acquièrent un sens réel par la théorie des fonctions elliptiques, et l'énoncé précédent se présente alors de lui-même.

IV.

8. Les seize points d'une biquadratique gauche en lesquels le plan osculateur est surosculateur sont tels que le plan qui passe par trois quelconques de ces points passe par un quatrième. Comme il passe cinq plans par chaque point, le nombre de ces plans est

$$\frac{16 \times 5}{4} = 20.$$