C. CLAPIER

Concours d'agrégation de 1914. Solution de la question d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 537-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__537_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1914.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. C. CLAPIER

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, *on considère l'équation aux différentielles totales*

$$(1) \qquad a^2y^2\,dx + (z - a^3y^3)\,dy - y\,dz = 0$$

où a désigne une constante donnée.

I. *Déterminer les surfaces intégrales de l'équation* (1). *Ces surfaces* S *sont réglées; étudier leurs lignes de striction et leurs lignes asymptotiques.*

Exprimer, pour chaque ligne asymptotique d'une surface S, *la torsion en fonction de l'angle de la binormale avec l'axe* Oz.

II. *Les surfaces* S *satisfont toutes à une même équation aux dérivées partielles du premier ordre* (E), *indépendante de la valeur numérique de la constante a. Indiquer comment on peut, au moyen des surfaces* S, *engendrer toutes les surfaces intégrales* Σ *de cette équation.*

Les surfaces Σ *contiennent en général l'axe* Oz; *déterminer les surfaces exceptionnelles qui ne le contiennent pas, et indiquer leur nature.*

III. *Démontrer que les courbes caractéristiques de l'équation* (E) *sont les asymptotiques des différentes surfaces* S, *et qu'elles forment l'une des familles d'asymptotiques des surfaces* Σ. *Démontrer qu'elles peuvent être obtenues comme courbes de contact des surfaces* Σ *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Oz *rencontrant* Ox.

IV. *Déterminer la seconde famille de lignes asymptotiques des surfaces* Σ. *Démontrer que les courbes de cette seconde famille peuvent être obtenues comme courbes de contact des surfaces* Σ *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Ox *rencontrant* Oz. *Déterminer les surfaces réglées* Σ *distinctes des surfaces* S. *Indiquer leur valeur.*

V. *Soit* T *une surface jouissant de la propriété* *que l'une de ses familles de lignes asymptotiques est formée de courbes de contact de* T *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Ox *rencontrant* Oz. *Démontrer que la surface* T, *ou bien est une surface réglée à plan directeur parallèle au plan* yOz, *ou bien satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme*

$$(\mathrm{E}) \qquad F(z - qy, py) = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Démontrer que, dans le second cas, les lignes asymptotiques de l'autre famille sont des caractéristiques de l'équation (E), *à laquelle satisfait la surface* T, *et que ces lignes peuvent être obtenues comme courbes de contat de surface* T *avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à* Oz *rencontrant* Ox.

Si deux surfaces, dont chacune satisfait à une équation de la forme (E), *sont tangentes en un point, elles ont en ce point même courbure totale.*

I. L'équation différentielle

$$(1) \qquad a^2 y^2\, dx + (z - a^3 y^3)\, dy - y\, dz = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$a^2 y^2 (dx - a y\, dy) + z\, dy - y\, dz = 0.$$

En divisant par y^2, elle se compose de deux termes intégrables; et si nous désignons par A une constante arbitraire, nous avons, en effectuant l'intégration et multipliant par y,

$$(2) \qquad z = \mathrm{A}y + a^2 xy - \frac{a^3 y^3}{2}.$$

C'est l'équation des surfaces intégrales S; ce sont des surfaces du troisième degré, engendrées par les droites dont les équations s'écrivent avec le paramètre variable

$$(3)\qquad \begin{cases} y = t, \\ z = a^2 t x + A t - \dfrac{a^3 t^3}{2}. \end{cases}$$

Ces droites étant parallèles au plan des zx, deux droites voisines ont une perpendiculaire commune normale à ce plan, et la courbe enveloppe des droites représentées par la seconde équation (3) est la projection de la ligne de striction sur le plan des zx. On aura donc, pour tous les points de cette ligne,

$$\frac{3a^3t^2}{2} = a^2 x + A.$$

Comme $y = t$, le cylindre projetant la ligne de striction de la surface S aura pour équation

$$(4)\qquad x = \frac{3a}{2} y^2 + \text{const.}$$

Cherchons les lignes asymptotiques de cette même surface, représentée par l'équation (2); nous avons, avec les notations habituelles,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a^2 y,$$
$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = A + a^2 x - \frac{3a^3y^2}{2}.$$

Formons la condition $dp\,dx + dq\,dy = 0$; nous obtenons, après suppression du facteur dy qui correspond aux droites génératrices, l'équation différentielle

$$2\,dx - 3ay\,dy = 0$$

qui, intégrée, nous donne les cylindres paraboliques

$$(5)\qquad x = \frac{3a}{4} y^2 + \text{const.},$$

Les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy, suivant des paraboles de même paramètre $2p$, se déduisant de l'une d'elles par une translation continue parallèle à Ox. Il en est de même des paraboles projections des lignes de striction (4), dont le paramètre est

$$p = \frac{1}{3a}.$$

La torsion d'une courbe étant donnée par la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{-\Delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

si nous l'appliquons à une ligne asymptotique définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= \frac{3a}{4} y^2 + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.}). \\ y &= t, \\ z &= (A + a^2\alpha)\varphi + \frac{a^3}{4} y^3, \end{aligned}$$

nous obtenons facilement

$$\Delta = -\frac{9}{4} a^4, \qquad C = -\frac{3}{2} a.$$

Si l'on désigne par φ l'angle de la binormale avec l'axe des z, nous avons

$$\cos\varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

et, par suite,

$$\frac{1}{T} = -\frac{\Delta}{C^2} \cos^2\varphi = a^2 \cos^2\varphi.$$

II. Les surfaces S, envisagées comme dépendant de deux constantes arbitraires A et a, satisfont à une équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant ces constantes entre l'équation (2) et celles qui donnent les valeurs de p et q, déjà écrites. L'élimination se fait simplement en formant $z+px-qy$, et l'on trouve l'équation

$$(z-qy)-(py)^{\frac{3}{2}}=0. \tag{6}$$

C'est l'équation (E) dont les surfaces S sont des intégrales complètes.

Pour avoir les surfaces Σ, il suffit de prendre l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par l'équation (2), avec A et a comme constantes arbitraires.

Posons $A=\varphi(a)$; les surfaces Σ' correspondantes seront données par l'élimination de a entre les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} z &= \varphi(a)y+a^2xy-\frac{a^3y^3}{2},\\ 0 &= \varphi'(a)\ \ +2ax-\frac{3a^2}{2}y^2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si l'on suppose $\varphi(a)=ca^2+b$, b et c étant deux nouvelles constantes, nous obtenons, par l'élimination de a, les surfaces

$$z=by+\frac{16}{27}\left(\frac{x+c}{y}\right)^3 \tag{8}$$

qui représentent une nouvelle série d'intégrales complètes. Ces surfaces sont réglées et engendrées par deux plans variables dont l'un tourne autour d'une parallèle à l'axe des z du plan des xz, tandis que l'autre reste parallèle à un plan fixe. Ces surfaces particulières ne passent pas par l'axe des x; ce sont des conoïdes. Si l'on envisage $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$, dans les équations (7), comme deux constantes arbitraires A et B, le complexe des caractéristiques qui engendrent les surfaces Σ est défini par les équations

$$(9)\qquad \begin{cases} z = \mathrm{A}y + a^i xy - \dfrac{a^3 y^3}{2}, \\ 0 = \mathrm{B}y + 2ax - \dfrac{3a^2}{2} y^3, \end{cases}$$

avec les trois constantes paramétriques A, B et a. Or la seconde de ces équations, divisée par $2a$, est identique à l'équation (5) qui détermine les lignes asymptotiques des surfaces S, définies par la première équation (9).

Les autres propriétés des surfaces Σ, que l'on propose de démontrer dans les paragraphes III et IV, résultent des propriétés plus générales des surfaces T, considérées dans la cinquième partie du problème. Elles proviennent de la forme de leur équation aux dérivées partielles (6) qui a bien la forme

$$\mathrm{F}(z - qy, py) = 0.$$

V. Considérons les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à Ox rencontrant Oz ; leur équation peut s'écrire

$$(10)\qquad z = h + y\,\varphi(x).$$

Une surface T étant l'enveloppe d'une famille de ces conoïdes, on aura, pour tous les points d'une même courbe de contact, les mêmes valeurs de p et q pour la surface et pour le conoïde

$$(11)\qquad \begin{cases} p = y\,\varphi'(x) \\ q = \varphi(x) \end{cases} \qquad (dz = p\,dx + q\,dy).$$

Si nous voulons de plus que cette famille de courbes de contact soit, sur la surface T, une famille (A) de courbes asymptotiques, nous devrons avoir

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

ce qui donne les deux relations

$$dx = 0 \qquad \text{et} \qquad y\,\varphi''(x)\,dx + 2\,\varphi'(x)\,dy = 0.$$

La première nous donne la courbe

$$x = k,$$
$$z = h + y\,\varphi(x),$$

qui contient les deux arbitraires h et k; elle engendre une surface réglée à plan directeur parallèle au plan yOz. La seconde relation différentielle peut s'écrire

$$2\frac{dy}{y} + \frac{d.\varphi'}{\varphi''} = 0$$

et, en intégrant, on trouve que les courbes (A) situées sur les conoïdes (10) doivent satisfaire à la relation

$$y^2 + \varphi'(x) = k.$$

En portant dans les égalités (11), on voit que les coefficients directeurs p et q du plan tangent à une surface T doivent satisfaire aux conditions

(12) (A) $$p = \frac{k}{y}, \qquad q = \frac{z-h}{y},$$

h et k étant deux constantes arbitraires.

On aura une surface T en établissant une relation entre ces deux constantes

$$h = z - qy, \qquad k = py.$$

Cette surface satisfait donc à une équation aux dérivées partielles de la forme

(E) $$F(z - qy, py) = 0.$$

Formons les équations différentielles qui déterminent les caractéristiques de cette équation ; nous avons

$$\frac{dx}{y\mathrm{F}_1} = \frac{dy}{-y\mathrm{F}_2} = \frac{dp}{-p\mathrm{F}_2} = \frac{dq}{-p\mathrm{F}_1},$$

d'où l'on déduit les deux relations

$$(13) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{dq}{-p}.$$

Elles vérifient la relation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

ce qui prouve que ces caractéristiques constituent une des familles de lignes asymptotiques de la surface T. Ce n'est point celle d'où l'on est parti (A), car elle satisfait aux intégrales

$$(14) \quad (\mathrm{A}_1) \qquad p = k_1 y, \qquad q = -k_1 x + p_1$$

différentes des intégrales (12).

Montrons que ces courbes (A_1) peuvent être obtenues comme courbes de contact de la surface T avec les conoïdes droits admettant pour axes les parallèles à Oz rencontrant Ox.

Nous pouvons écrire l'équation de ces conoïdes sous la forme

$$z = f\left(\frac{x - x_0}{y}\right), \qquad u = \frac{x - x_0}{y};$$

on en déduit

$$(15) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{y} f'(u), \\[2ex] q = \dfrac{x_0 - x}{y^2} f'(u). \end{cases}$$

Formant $dp\,dx + dq\,dy = 0$, on trouve, après suppression du facteur $y\,dz + (x_0 - x)\,dy$, la relation différentielle

$$f''(u)\,dx = 2\,f'(u)\,dy,$$

et comme

$$\frac{d.f'(u)}{dx} = f''(u)\frac{1}{y},$$

il vient

$$\frac{d.f'(u)}{f'(u)} = 2\frac{dy}{y}.$$

On a donc, en intégrant,

$$f'(u) = \text{const.}\,y^2.$$

Les égalités (15) nous donnent, par suite, les expressions

$$\begin{aligned} p &= \quad k_1 y,\\ q &= -k_1 x + h_1, \end{aligned}$$

en désignant par k_1 et h_1 deux nouvelles constantes arbitraires. Ces expressions étant identiques aux intégrales (14), la proposition est démontrée.

Soient deux surfaces T et T_1, tangentes en un point $M(x, y, z, p, q)$, telles que chacune satisfait à une équation de la forme (E); je dis qu'elles ont même courbure totale en ce point M.

Il suffit de montrer que la courbure totale de la surface T qui est donnée par la formule

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

ne dépend que du point considéré et du plan tangent en ce point.

Or, nous pouvons écrire l'équation aux dérivées partielles (E) sous la forme

$$z = qy + f(p, y),$$

d'où l'on déduit les dérivées secondes en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à y :

$$p = sy + yr\,f'(py),$$
$$0 = ty + (p + ys)\,f'(py).$$

D'où, en éliminant $f'(py)$, on obtient

$$\frac{p - sy}{ty} + \frac{xy}{p + sy} = 0,$$
$$rt - s^2 = -\frac{p^2}{y^2}.$$

La courbure totale est donc

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\left[\frac{p}{y(1 + p^2 + q^2)}\right]^2;$$

elle est négative et indépendante des éléments du *deuxième ordre*.